

Jacob Formation

Première générale – Mathématiques

Notions logiques pour le raisonnement

CHAP-1G_MATH_SPE-MATH-001-003

Objectif général

Utiliser les connecteurs logiques et les formes de raisonnement classiques dans les démonstrations.

Présentation du chapitre

Cours

Objectif du cours

Clarifier les rôles des connecteurs logiques, des quantificateurs, des implications et de leurs variantes.

Objectif des exercices

Produire et analyser des raisonnements élémentaires utilisant disjonction de cas, contraposée ou absurde.

Prérequis

Raisonnement déductif simple, Connaissance intuitive de vrai et faux

Parcours du chapitre

1. Propositions avec et, ou

Interpréter correctement les connecteurs et et ou dans une proposition mathématique simple.

2. Implication, réciproque et contraposée

Reformuler une implication donnée en réciproque et en contraposée dans des cas concrets.

3. Contre-exemples efficaces

Construire un contre-exemple minimal pour montrer qu'une propriété proposée est fausse.

4. Négation de propositions quantifiées

Écrire la négation en langage courant d'une proposition quantifiée simple sans utiliser de symboles formels.

Table des matières

1	Propositions avec et, ou	2
2	Implication, réciproque et contraposée	11
3	Contre-exemples efficaces	22
4	Négation de propositions quantifiées	33

1 Propositions avec et, ou

CAP-1G_MATH_SPE-MATH-001-003-001

Propositions avec « et » et « ou »

Cours

Pourquoi apprend-on cela ?

En mathématiques, une phrase peut être vraie ou fausse. Pour construire un raisonnement rigoureux, il faut savoir interpréter correctement les mots logiques.

Les connecteurs « et » et « ou » apparaissent partout :

$$x > 0 \text{ et } x < 5, \quad x = 0 \text{ ou } x = 1, \quad n \text{ est pair ou multiple de } 3.$$

Une mauvaise interprétation de « ou » peut changer complètement le sens d'un énoncé.

Cours

Objectif

Savoir interpréter correctement une proposition mathématique contenant :

$$\text{« et »} \quad \text{ou} \quad \text{« ou »}.$$

À la fin de la capsule, on doit savoir :

- décider si une proposition composée est vraie ou fausse ;
- distinguer « et » de « ou » ;
- comprendre que le « ou » mathématique est inclusif ;
- relier ces connecteurs aux intersections et unions d'ensembles.

Cours

Prérequis utiles

- Une **proposition** est un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité : vrai ou faux.
- Un raisonnement mathématique doit préciser dans quels cas une proposition est vraie.
- On connaît intuitivement les valeurs « vrai » et « faux ».

Exemples :

$$\text{« } 2 + 3 = 5 \text{ » est vraie,} \quad \text{« } 7 < 4 \text{ » est fausse.}$$

Cours

Cours

1. Proposition composée avec « et »

Soient P et Q deux propositions.

La proposition

$$P \text{ et } Q$$

est vraie lorsque P est vraie **et** Q est vraie.

Elle est fausse dès qu'au moins une des deux propositions est fausse.

P	Q	$P \text{ et } Q$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

Le connecteur « et » correspond à l'idée de **simultanéité**.

$$x > 0 \text{ et } x < 5$$

signifie que les deux conditions doivent être satisfaites en même temps.

2. Proposition composée avec « ou »

Soient P et Q deux propositions.

La proposition

$$P \text{ ou } Q$$

est vraie lorsqu'au moins une des deux propositions est vraie.

En mathématiques, sauf indication contraire, le « ou » est **inclusif**. Cela signifie que P et Q peuvent être vraies en même temps.

P	Q	$P \text{ ou } Q$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

Le connecteur « ou » correspond à l'idée de **au moins une condition**.

$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$

signifie que $x = 0$, ou $x = 1$, éventuellement les deux si cela est possible dans le contexte.

3. Lien avec les ensembles

Lorsqu'une proposition dépend d'une variable, par exemple x , on peut regarder l'ensemble des valeurs qui la rendent vraie.

Si :

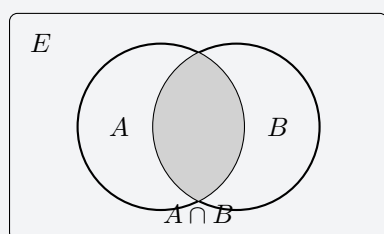
$$A = \{x \mid P(x) \text{ est vraie}\} \quad \text{et} \quad B = \{x \mid Q(x) \text{ est vraie}\},$$

alors :

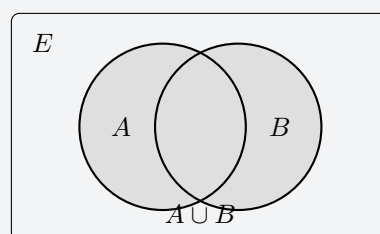
$$P(x) \text{ et } Q(x) \iff x \in A \cap B,$$

et

$$P(x) \text{ ou } Q(x) \iff x \in A \cup B.$$



« et »



« ou »

Sur le schéma de gauche, seule la partie commune aux deux ensembles est retenue. Sur le schéma de droite, toute la partie appartenant à au moins un des deux ensembles est retenue.

Méthode

Méthode

Pour interpréter une proposition avec « et » ou « ou » :

1. Identifier les propositions simples P et Q .
2. Déterminer séparément si P est vraie ou fausse.
3. Déterminer séparément si Q est vraie ou fausse.
4. Appliquer la règle :

P et Q est vraie seulement si les deux sont vraies.

P ou Q est vraie si au moins une des deux est vraie.

5. Si les propositions dépendent d'une variable, traduire :

$$\text{« et »} \iff \cap, \quad \text{« ou »} \iff \cup.$$

Exemple**Exemple corrigé**

On considère les deux propositions dépendant d'un réel x :

$$P(x) : x \geq -1, \quad Q(x) : x < 3.$$

Question 1 : résoudre $P(x)$ et $Q(x)$

On cherche les réels x qui vérifient simultanément :

$$x \geq -1 \quad \text{et} \quad x < 3.$$

Cela donne :

$$-1 \leq x < 3.$$

Donc :

$$P(x) \text{ et } Q(x) \iff x \in [-1; 3[.$$

Question 2 : résoudre $P(x)$ ou $Q(x)$

On cherche les réels x qui vérifient au moins une des deux conditions :

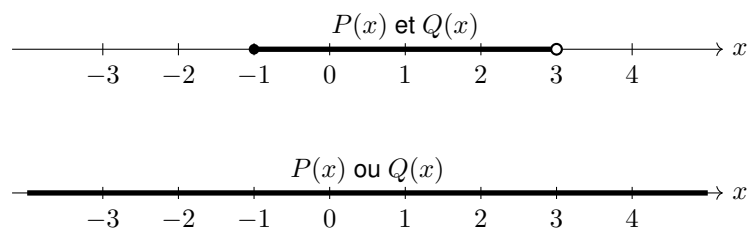
$$x \geq -1 \quad \text{ou} \quad x < 3.$$

Tout réel x vérifie au moins l'une des deux conditions :

- si $x < 3$, alors $Q(x)$ est vraie ;
- si $x \geq 3$, alors $x \geq -1$, donc $P(x)$ est vraie.

Donc :

$$P(x) \text{ ou } Q(x) \iff x \in \mathbb{R}.$$



Interprétation : avec « et », on garde seulement les réels qui satisfont les deux conditions. Avec « ou », on garde tous les réels qui satisfont au moins une condition.

Cours**Erreurs fréquentes**

- **Erreur 1 : croire que « ou » exclut le cas où les deux propositions sont vraies.**

En mathématiques, le « ou » est inclusif. Si P et Q sont toutes les deux vraies, alors P ou Q est vraie.

- **Erreur 2 : confondre « et » avec « ou ».**

La proposition P et Q est plus exigeante que P ou Q . Elle demande que les deux conditions soient vérifiées.

- **Erreur 3 : ne pas tester séparément les propositions simples.**

Avant de conclure, il faut évaluer P puis Q . Ensuite seulement, on applique la règle du connecteur.

- **Erreur 4 : traduire automatiquement « ou » par un choix unique.**

Dans la langue courante, « fromage ou dessert » signifie souvent un seul choix. En mathématiques, « P ou Q » signifie : au moins une des deux propositions est vraie.

Exemple

Exercices d'application

Exercice 1

On sait que P est vraie, Q est fausse et R est vraie.

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

$$P \text{ et } Q, \quad P \text{ ou } Q, \quad Q \text{ ou } R, \quad P \text{ et } R.$$

Exercice 2

On considère un réel x . On définit :

$$A(x) : x \geq 1, \quad B(x) : x < 4.$$

Décrire, sous forme d'intervalle ou d'ensemble, les réels x qui vérifient :

$$A(x) \text{ et } B(x), \quad A(x) \text{ ou } B(x).$$

Exercice 3

Pour chaque entier n , on considère les propositions :

$$P(n) : n \text{ est pair}, \quad Q(n) : n \text{ est multiple de } 3.$$

Pour $n = 10$, $n = 12$ et $n = 15$, déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

$$P(n) \text{ et } Q(n), \quad P(n) \text{ ou } Q(n).$$

Exercice 4

Dans chaque cas, dire si la phrase mathématique est vraie ou fausse. Justifier.

1. $5 > 2$ et $5 < 4$.

2. 7 est impair ou 7 est multiple de 3.
3. 0 est positif ou 0 est négatif, en prenant « positif » au sens $x \geq 0$.
4. $-2 < 0$ et $(-2)^2 = 4$.

Exemple

Exercices d'approfondissement

Exercice 5

On considère deux propositions P et Q .

Compléter mentalement les phrases suivantes, puis justifier par une table de vérité :

1. Pour que P et Q soit vraie, il faut que ...
2. Pour que P ou Q soit fausse, il faut que ...
3. Si P et Q est vraie, que peut-on dire de P ou Q ?

Exercice 6

On considère un réel x et les propositions :

$$P(x) : x^2 = 4, \quad Q(x) : x > 0.$$

Déterminer les réels x qui vérifient :

$$P(x) \text{ et } Q(x), \quad P(x) \text{ ou } Q(x).$$

Justifier soigneusement.

Cours

Synthèse

En mathématiques, P et Q est vraie seulement lorsque les deux propositions sont vraies. P ou Q est vraie lorsqu'au moins une des deux propositions est vraie.

À retenir :

Connecteur	Sens mathématique
« et »	les deux conditions sont vraies
« ou »	au moins une condition est vraie

Lien avec les ensembles :

$$\text{« et »} \leftrightarrow \cap, \quad \text{« ou »} \leftrightarrow \cup.$$

Cours

Corrections détaillées

Correction de l'exercice 1

On utilise les règles suivantes :

P et Q est vraie seulement si P et Q sont vraies,

P ou Q est vraie si au moins une des deux propositions est vraie.

On sait :

P : vraie, Q : fausse, R : vraie.

Donc :

P et Q : fausse,

car Q est fausse.

P ou Q : vraie,

car P est vraie.

Q ou R : vraie,

car R est vraie.

P et R : vraie,

car P et R sont toutes les deux vraies.

Correction de l'exercice 2

On a :

$A(x) : x \geq 1$, $B(x) : x < 4$.

Pour $A(x)$ et $B(x)$, les deux conditions doivent être vraies simultanément :

$x \geq 1$ et $x < 4$.

Donc :

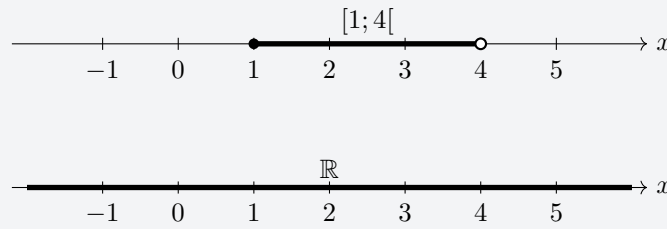
$A(x)$ et $B(x) \iff x \in [1; 4[$.

Pour $A(x)$ ou $B(x)$, il suffit qu'au moins une condition soit vraie.

Si $x < 4$, alors $B(x)$ est vraie. Si $x \geq 4$, alors $x \geq 1$, donc $A(x)$ est vraie.

Ainsi, tout réel x vérifie au moins l'une des deux propositions :

$A(x)$ ou $B(x) \iff x \in \mathbb{R}$.



Correction de l'exercice 3

On rappelle :

$$P(n) : n \text{ est pair}, \quad Q(n) : n \text{ est multiple de 3.}$$

Pour $n = 10$. 10 est pair, donc $P(10)$ est vraie. 10 n'est pas multiple de 3, donc $Q(10)$ est fausse.

Ainsi :

$$P(10) \text{ et } Q(10) \text{ est fausse,}$$

car les deux propositions ne sont pas vraies.

$$P(10) \text{ ou } Q(10) \text{ est vraie,}$$

car $P(10)$ est vraie.

Pour $n = 12$. 12 est pair, donc $P(12)$ est vraie. 12 est multiple de 3, donc $Q(12)$ est vraie.

Ainsi :

$$P(12) \text{ et } Q(12) \text{ est vraie,}$$

et

$$P(12) \text{ ou } Q(12) \text{ est vraie.}$$

Pour $n = 15$. 15 n'est pas pair, donc $P(15)$ est fausse. 15 est multiple de 3, donc $Q(15)$ est vraie.

Ainsi :

$$P(15) \text{ et } Q(15) \text{ est fausse,}$$

car $P(15)$ est fausse.

$$P(15) \text{ ou } Q(15) \text{ est vraie,}$$

car $Q(15)$ est vraie.

Correction de l'exercice 4

1. $5 > 2$ est vraie, mais $5 < 4$ est fausse. Une proposition avec « et » est vraie seulement si les deux parties sont vraies. Donc :

$$5 > 2 \text{ et } 5 < 4$$

est fausse.

2. 7 est impair : c'est vrai. 7 est multiple de 3 : c'est faux. Avec « ou », il suffit qu'une des deux propositions soit vraie. Donc la proposition est vraie.
3. On prend « positif » au sens $x \geq 0$. Alors 0 est positif est vraie, car $0 \geq 0$. 0 est négatif est fausse si « négatif » signifie $x < 0$. Avec « ou », une proposition vraie suffit. Donc la proposition est vraie.
4. $-2 < 0$ est vraie. $(-2)^2 = 4$ est vraie. Les deux propositions sont vraies, donc la proposition avec « et » est vraie.

Correction de l'exercice 5

1. Pour que P et Q soit vraie, il faut que P soit vraie et que Q soit vraie.
2. Pour que P ou Q soit fausse, il faut que P soit fausse et que Q soit fausse.
3. Si P et Q est vraie, alors P est vraie et Q est vraie. Donc, en particulier, au moins une des deux est vraie. Ainsi P ou Q est vraie.

Table de vérité récapitulative :

P	Q	P et Q	P ou Q
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Faux	Vrai
Faux	Faux	Faux	Faux

Correction de l'exercice 6

On considère :

$$P(x) : x^2 = 4, \quad Q(x) : x > 0.$$

D'abord, on résout séparément chaque condition.

$$x^2 = 4 \iff x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

Donc :

$$P(x) \text{ est vraie pour } x \in \{-2; 2\}.$$

La proposition $Q(x)$ est vraie pour :

$$x \in]0; +\infty[.$$

Étude de $P(x)$ et $Q(x)$. On cherche les réels qui vérifient les deux conditions :

$$x \in \{-2; 2\} \quad \text{et} \quad x > 0.$$

Parmi -2 et 2 , seul 2 est strictement positif.

Donc :

$$P(x) \text{ et } Q(x) \iff x = 2.$$

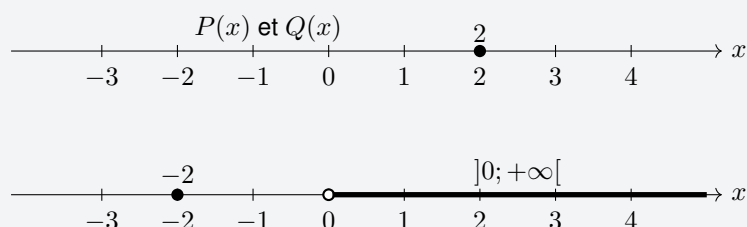
Étude de $P(x)$ ou $Q(x)$. On cherche les réels qui vérifient au moins une des deux conditions :

$$x \in \{-2; 2\} \quad \text{ou} \quad x > 0.$$

Tous les réels strictement positifs conviennent, et -2 convient aussi car $(-2)^2 = 4$.

Donc :

$$P(x) \text{ ou } Q(x) \iff x \in \{-2\} \cup]0; +\infty[.$$



Le point 2 appartient bien à $]0; +\infty[$, donc il est déjà inclus dans la partie positive de l'ensemble solution du « ou ».

2 Implication, réciproque et contraposée

CAP-1G_MATH_SPE-MATH-001-003-002

Pourquoi apprend-on cela ?

Cours

En mathématiques, beaucoup de résultats s'écrivent sous la forme :

si une condition est vérifiée, alors une conclusion est vraie.

Comprendre une implication permet de :

- lire correctement un énoncé ;
- ne pas confondre une propriété avec sa réciproque ;
- démontrer plus efficacement, notamment avec la contraposée ;
- repérer les raisonnements faux.

Par exemple, l'énoncé

Si un entier est multiple de 4, alors il est pair

est vrai, mais sa réciproque

Si un entier est pair, alors il est multiple de 4

est fausse.

Objectif de la capsule

Cours

Savoir reformuler une implication donnée sous deux formes importantes :

- sa **réciroque** ;
- sa **contraposée**.

On devra aussi savoir reconnaître que :

$$(P \Rightarrow Q) \quad \text{et} \quad (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$$

sont logiquement équivalentes, alors que la réciroque ne l'est pas en général.

Prérequis utiles

Cours

- Une **proposition** est une phrase mathématique qui est soit vraie, soit fausse.
- Le symbole $\Rightarrow$ se lit : « implique » ou « si . . . , alors . . . ».
- La négation de P , notée $\neg P$, signifie : « P est fausse ».

Exemples de négations :

$$x > 3 \quad \text{a pour négation} \quad x \leq 3.$$

$$n \text{ est pair} \quad \text{a pour négation} \quad n \text{ est impair}$$

lorsque n est un entier.

Cours

1. Implication

Cours

Soient P et Q deux propositions.

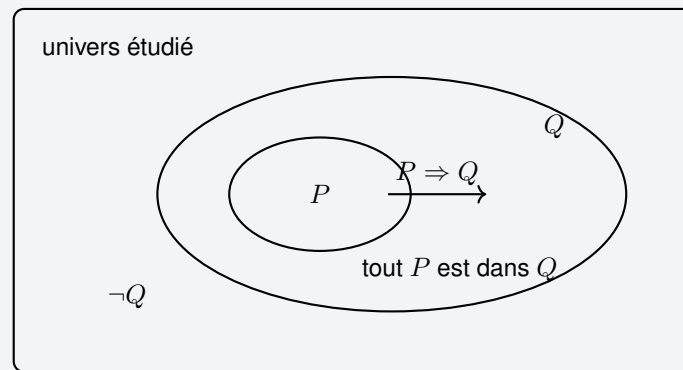
Une implication s'écrit :

$$P \Rightarrow Q.$$

Elle se lit :

$$\text{« Si } P \text{ est vraie, alors } Q \text{ est vraie. »}$$

L'implication $P \Rightarrow Q$ affirme que toutes les situations où P est vraie sont aussi des situations où Q est vraie.



Le schéma représente une inclusion : si un élément vérifie P , alors il vérifie forcément Q .

2. Table de vérité d'une implication

Cours

L'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse dans un seul cas : lorsque P est vraie et Q est fausse.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux
faux	vrai	vrai
faux	faux	vrai

Cela correspond à l'idée suivante : pour réfuter une implication, il faut trouver un **contre-exemple**, c'est-à-dire une situation où P est vraie mais Q est fausse.

3. Réciproque

Cours

La **réciproque** de l'implication

$$P \Rightarrow Q$$

est l'implication

$$Q \Rightarrow P.$$

On échange simplement l'hypothèse et la conclusion.

$$P \Rightarrow Q \quad \text{a pour réciproque} \quad Q \Rightarrow P.$$

Attention : une implication vraie peut avoir une réciproque fausse.

Exemple :

Si n est multiple de 4, alors n est pair.

Cette implication est vraie.

Sa réciproque est :

Si n est pair, alors n est multiple de 4.

Elle est fausse, car 6 est pair mais n'est pas multiple de 4.

4. Contraposée

Cours

La **contraposée** de l'implication

$$P \Rightarrow Q$$

est l'implication

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

On inverse l'ordre et on nie les deux propositions.

$$P \Rightarrow Q \quad \text{a pour contraposée} \quad \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Propriété fondamentale :

$$P \Rightarrow Q \quad \Longleftrightarrow \quad \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Une implication et sa contraposée sont toujours équivalentes : elles ont toujours la même valeur de vérité.

5. Réciproque et contraposée : comparaison

Cours

Forme	Écriture	Lien avec $P \Rightarrow Q$
Implication directe	$P \Rightarrow Q$	énoncé de départ
Réciproque	$Q \Rightarrow P$	pas équivalente en général
Contraposée	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	toujours équivalente

Il faut donc toujours vérifier séparément la réciproque.

Méthode

Méthode

Pour reformuler une implication :

1. Repérer clairement l'hypothèse P .
2. Repérer clairement la conclusion Q .

3. Écrire l'implication sous la forme :

$$P \Rightarrow Q.$$

4. Pour écrire la réciproque, échanger P et Q :

$$Q \Rightarrow P.$$

5. Pour écrire la contraposée :

- nier la conclusion Q ;
- nier l'hypothèse P ;
- inverser l'ordre :

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Point de vigilance : la négation doit être exacte.

$$x > 2 \text{ a pour négation } x \leq 2,$$

et non $x < 2$.

Exemple corrigé

Exemple

Énoncé.

On considère l'implication suivante :

$$\text{Si } x > 3, \text{ alors } x^2 > 9.$$

Écrire sa réciproque et sa contraposée.

Correction.

On identifie :

$$P : x > 3$$

et

$$Q : x^2 > 9.$$

L'implication de départ est donc :

$$P \Rightarrow Q.$$

Réciproque.

La réciproque est :

$$Q \Rightarrow P.$$

Donc :

$$\text{Si } x^2 > 9, \text{ alors } x > 3.$$

Cette réciproque est fausse sur $\mathbb{R}$, car par exemple $x = -4$ vérifie

$$(-4)^2 = 16 > 9$$

mais ne vérifie pas

$$-4 > 3.$$

Contraposée.

On nie d'abord Q :

$$x^2 > 9 \text{ devient } x^2 \leq 9.$$

On nie ensuite P :

$$x > 3 \text{ devient } x \leq 3.$$

La contraposée est donc :

$$\text{Si } x^2 \leq 9, \text{ alors } x \leq 3.$$

Cette contraposée est vraie, comme l'implication de départ.

Erreurs fréquentes

Cours

Erreur 1 : croire que la réciproque est automatiquement vraie.

Si $P \Rightarrow Q$ est vraie, cela ne prouve pas que $Q \Rightarrow P$ est vraie.

Exemple :

$$\text{multiple de 4} \Rightarrow \text{pair}$$

est vrai, mais

$$\text{pair} \Rightarrow \text{multiple de 4}$$

est faux.

Erreur 2 : mal écrire la négation d'une inégalité.

La négation de $x > 5$ est :

$$x \leq 5.$$

Ce n'est pas $x < 5$, car il faut inclure le cas $x = 5$.

Erreur 3 : confondre contraposée et réciproque.

Pour $P \Rightarrow Q$:

$$\text{réciproque : } Q \Rightarrow P,$$

mais

$$\text{contraposée : } \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Erreur 4 : confondre contraposée et implication contraire.

L'implication

$$\neg P \Rightarrow \neg Q$$

n'est pas la contraposée de $P \Rightarrow Q$. C'est la contraposée de la réciproque.

Exercices d'application

Exemple

Exercice 1.

On considère l'implication :

Si un entier n est multiple de 6, alors n est multiple de 3.

1. Identifier P et Q .
2. Écrire la réciproque.
3. Écrire la contraposée.

Exemple

Exercice 2.

On considère l'implication :

Si $x = 2$, alors $x^2 = 4$.

1. Écrire la réciproque.
2. Écrire la contraposée.
3. Dire si la réciproque est vraie sur $\mathbb{R}$, en justifiant.

Exemple

Exercice 3.

On considère l'implication :

Si un quadrilatère est un carré, alors c'est un rectangle.

1. Identifier l'hypothèse et la conclusion.
2. Écrire la réciproque.
3. Écrire la contraposée.
4. Préciser si la réciproque est vraie.

Exercices d'approfondissement

Exemple

Exercice 4.

On considère l'implication :

Si une fonction est dérivable en a , alors elle est continue en a .

1. Écrire la réciproque.
2. Écrire la contraposée.
3. Expliquer pourquoi la contraposée est souvent utile pour raisonner.

Exemple

Exercice 5.

Soit n un entier.

On souhaite démontrer l'implication :

n^2 est impair $\Rightarrow n$ est impair.

1. Écrire la contraposée de cette implication.
2. Démontrer cette contraposée.
3. Conclure sur l'implication de départ.

Synthèse

Cours

Pour une implication

$$P \Rightarrow Q,$$

il faut retenir :

Nom	Forme logique
Implication directe	$P \Rightarrow Q$
Réciproque	$Q \Rightarrow P$
Contraposée	$\neg Q \Rightarrow \neg P$

L'implication directe et sa contraposée sont toujours équivalentes. La réciproque doit être étudiée séparément.

Corrections détaillées

Exemple

Correction de l'exercice 1.

Implication donnée :

Si un entier n est multiple de 6, alors n est multiple de 3.

1. Identification de P et Q .

On pose :

$P : n$ est multiple de 6,

$Q : n$ est multiple de 3.

L'implication est :

$$P \Rightarrow Q.$$

2. Réciproque.

La réciproque est :

$$Q \Rightarrow P.$$

Donc :

Si un entier n est multiple de 3, alors n est multiple de 6.

Cette réciproque est fausse. Par exemple, 9 est multiple de 3, mais 9 n'est pas multiple de 6.

3. Contraposée.

La contraposée est :

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Donc :

Si un entier n n'est pas multiple de 3, alors n n'est pas multiple de 6.

Cette contraposée est vraie, car elle est équivalente à l'implication de départ.

Exemple

Correction de l'exercice 2.

Implication donnée :

Si $x = 2$, alors $x^2 = 4$.

On pose :

$P : x = 2$,

$Q : x^2 = 4$.

1. Réciproque.

La réciproque est :

$$Q \Rightarrow P.$$

Donc :

$$\text{Si } x^2 = 4, \text{ alors } x = 2.$$

2. Contraposée.

La négation de Q est :

$$x^2 \neq 4.$$

La négation de P est :

$$x \neq 2.$$

La contraposée est donc :

$$\text{Si } x^2 \neq 4, \text{ alors } x \neq 2.$$

3. Validité de la réciproque sur $\mathbb{R}$.

La réciproque affirme :

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2.$$

Elle est fausse sur $\mathbb{R}$, car $x = -2$ vérifie :

$$(-2)^2 = 4,$$

mais

$$-2 \neq 2.$$

Donc -2 est un contre-exemple.

Exemple

Correction de l'exercice 3.

Implication donnée :

Si un quadrilatère est un carré, alors c'est un rectangle.

1. Hypothèse et conclusion.

On pose :

P : le quadrilatère est un carré,

Q : le quadrilatère est un rectangle.

2. Réciproque.

La réciproque est :

$$Q \Rightarrow P.$$

Donc :

Si un quadrilatère est un rectangle, alors c'est un carré.

3. Contraposée.

La contraposée est :

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Donc :

Si un quadrilatère n'est pas un rectangle, alors ce n'est pas un carré.

4. Validité de la réciproque.

La réciproque est fausse. Un rectangle peut ne pas être un carré : il peut avoir deux longueurs différentes.

Ainsi, l'implication directe est vraie, mais sa réciproque est fausse.

Exemple

Correction de l'exercice 4.

Implication donnée :

Si une fonction est dérivable en a , alors elle est continue en a .

On pose :

P : la fonction est dérivable en a ,

Q : la fonction est continue en a .

1. Réciproque.

La réciproque est :

$$Q \Rightarrow P.$$

Donc :

Si une fonction est continue en a , alors elle est dérivable en a .

Cette réciproque est fausse en général : une fonction peut être continue en un point sans y être dérivable.

2. Contraposée.

La contraposée est :

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Donc :

Si une fonction n'est pas continue en a , alors elle n'est pas dérivable en a .

3. Utilité de la contraposée.

La contraposée est utile car elle est équivalente à l'implication de départ.

Ainsi, pour prouver qu'une fonction n'est pas dérivable en a , il suffit parfois de montrer qu'elle n'est pas continue en a .

On utilise alors la propriété :

$$P \Rightarrow Q \iff \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Exemple**Correction de l'exercice 5.**

On veut démontrer :

$$n^2 \text{ est impair} \Rightarrow n \text{ est impair.}$$

On pose :

$$P : n^2 \text{ est impair,}$$

$$Q : n \text{ est impair.}$$

1. Contraposée.

La contraposée est :

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Comme n est un entier, la négation de « n est impair » est « n est pair ».

La négation de « n^2 est impair » est « n^2 est pair ».

La contraposée est donc :

$$n \text{ est pair} \Rightarrow n^2 \text{ est pair.}$$

2. Démonstration de la contraposée.

Supposons que n soit pair.

Alors il existe un entier k tel que :

$$n = 2k.$$

On calcule :

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Comme $2k^2$ est un entier, n^2 est de la forme $2m$, avec $m \in \mathbb{Z}$.

Donc n^2 est pair.

3. Conclusion.

On a démontré la contraposée :

$$n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair.}$$

Comme une implication et sa contraposée sont équivalentes, on en déduit :

$$n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair.}$$

3 Contre-exemples efficaces

CAP-1G_MATH_SPE-MATH-001-003-003

Contre-exemples efficaces

Cours

Pourquoi apprend-on cela ? En mathématiques, une propriété est souvent formulée avec les mots « pour tout » ou « si ... alors ... ».

Pour montrer qu'une propriété universelle est vraie, il faut une démonstration générale.

Pour montrer qu'elle est fausse, il suffit parfois de trouver un seul objet qui la contredit : c'est un **contre-exemple**.

Un contre-exemple bien choisi permet donc de réfuter rapidement une affirmation fausse.

Cours

Objectif Savoir construire un **contre-exemple minimal** pour montrer qu'une propriété proposée est fausse.

À la fin de cette capsule, il faut savoir :

- repérer la forme logique d'une propriété ;
- vérifier les hypothèses ;
- vérifier que la conclusion est fausse ;
- choisir un exemple simple, court et convaincant.

Cours

Prérequis utiles

- Une affirmation mathématique peut être **vraie** ou **fausse**.
- Une implication s'écrit :

$$P \implies Q$$

et se lit : « si P , alors Q ».

- Une propriété universelle a souvent la forme :

$$\forall x \in E, \quad P(x) \implies Q(x).$$

Elle signifie : pour tout élément x de l'ensemble E , si x vérifie P , alors il vérifie Q .

Cours

Cours : qu'est-ce qu'un contre-exemple ? Considérons une propriété de la forme :

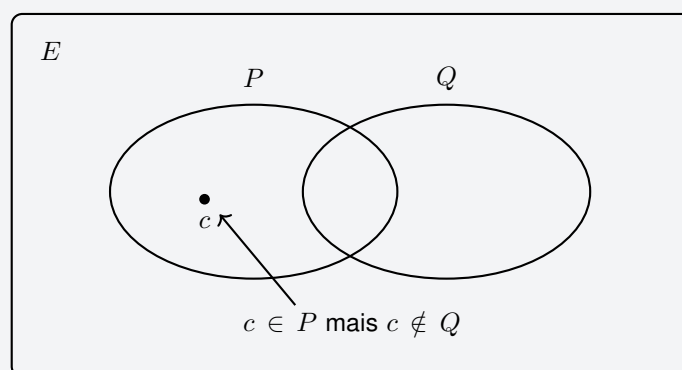
$$\forall x \in E, \quad P(x) \implies Q(x).$$

Un **contre-exemple** est un élément $c \in E$ tel que :

$$P(c) \text{ est vraie} \quad \text{et} \quad Q(c) \text{ est fausse.}$$

Autrement dit, le contre-exemple respecte toutes les hypothèses, mais contredit la conclusion.

La négation de $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$ est $\exists c \in E, P(c)$ et $\neg Q(c)$.



Sur le schéma, le point c est dans la zone P , donc il vérifie l'hypothèse. Mais il n'est pas dans la zone Q , donc il ne vérifie pas la conclusion. Il réfute donc l'implication universelle.

Cours

Le rôle de l'implication Une implication $P \Rightarrow Q$ est fausse dans un seul cas : lorsque P est vraie et Q est fausse.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux
faux	vrai	vrai
faux	faux	vrai

Donc, pour construire un contre-exemple à une implication, il faut chercher :

hypothèse vraie et conclusion fausse.

Cours

Qu'appelle-t-on un contre-exemple minimal ? Un contre-exemple **minimal** est un contre-exemple aussi simple que possible.

Selon le contexte, cela peut signifier :

- le plus petit entier possible ;
- un nombre simple comme 0, 1, -1 , 2, $\frac{1}{2}$;
- une situation avec peu d'objets ;
- une valeur qui évite des calculs inutiles.

Le mot « minimal » ne signifie pas toujours « unique ». Il signifie surtout : **efficace, lisible et suffisant**.

Méthode

Méthode : construire un contre-exemple efficace Pour réfuter une propriété, on suit quatre étapes.

1. **Identifier l'ensemble de départ.** On repère où doivent vivre les objets : entiers, réels, points, fonctions, etc.
2. **Repérer l'hypothèse.** Dans une phrase « si P , alors Q », l'hypothèse est P .
3. **Forcer la conclusion à être fausse.** On cherche un objet pour lequel Q est fausse.
4. **Vérifier toutes les conditions.** Un contre-exemple est valide seulement s'il appartient au bon ensemble et vérifie toutes les hypothèses.

Un contre-exemple ne doit pas seulement rendre la conclusion fausse. Il doit aussi vérifier les hypothèses.

Exemple

Exemple corrigé On considère la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 4 \implies x = 2.$$

Montrons que cette propriété est fausse.

Étape 1 : identifier l'ensemble.

On travaille dans $\mathbb{R}$, donc le contre-exemple doit être un nombre réel.

Étape 2 : repérer l'hypothèse.

L'hypothèse est :

$$x^2 = 4.$$

Étape 3 : rendre la conclusion fausse.

La conclusion est :

$$x = 2.$$

Pour qu'elle soit fausse, il faut choisir un réel différent de 2.

Étape 4 : tester un candidat simple.

Prenons :

$$x = -2.$$

Alors :

$$(-2)^2 = 4.$$

L'hypothèse est donc vraie.

Mais :

$$-2 \neq 2.$$

La conclusion est donc fausse.

Conclusion :

Le nombre -2 est un contre-exemple. La propriété est fausse.

La propriété correcte serait :

$$x^2 = 4 \implies x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

Cours

Erreurs fréquentes

- **Erreur 1 : choisir un objet qui ne vérifie pas l'hypothèse.**

Exemple : pour réfuter « si $x^2 = 4$, alors $x = 2$ », prendre $x = 3$ ne marche pas, car $3^2 \neq 4$. L'hypothèse n'est pas vérifiée.

- **Erreur 2 : donner plusieurs exemples alors qu'un seul suffit.**

Un seul contre-exemple valide suffit pour montrer qu'une propriété universelle est fausse.

- **Erreur 3 : confondre contre-exemple et démonstration.**

Un contre-exemple prouve qu'une propriété est fausse. Il ne prouve pas qu'une autre propriété est vraie.

- **Erreur 4 : oublier l'ensemble de départ.**

Si la propriété parle d'entiers naturels, un nombre comme $\frac{1}{2}$ ne peut pas être utilisé comme contre-exemple.

- **Erreur 5 : contredire seulement la conclusion.**

Il ne suffit pas que la conclusion soit fausse. Les hypothèses doivent être vraies.

Exercices d'application

Exemple

Exercice 1 : reconnaître un contre-exemple Pour chaque situation, dire si le nombre proposé est un contre-exemple. Justifier.

1. Propriété : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1 \implies x = 1$. Nombre proposé : -1 .
2. Propriété : $\forall n \in \mathbb{Z}, n$ multiple de 4 $\implies n$ pair. Nombre proposé : 8.
3. Propriété : $\forall x \in \mathbb{R}, x < 0 \implies x^2 < 0$. Nombre proposé : -2 .

Exemple

Exercice 2 : construire un contre-exemple Pour chaque propriété, dire si elle est fausse en donnant un contre-exemple. S'il n'y a pas de contre-exemple évident, expliquer pourquoi.

1. $\forall n \in \mathbb{Z}, n$ pair $\implies n + 1$ pair.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \implies x^2 > x$.
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \implies a^2 < b^2$.
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, n$ multiple de 6 $\implies n$ multiple de 3.

Exemple

Exercice 3 : lire un contre-exemple dans un tableau On considère une propriété de la forme :

$$\forall x \in E, \quad P(x) \implies Q(x),$$

avec :

$$E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Le tableau suivant donne la valeur de vérité de $P(x)$ et de $Q(x)$.

x	-2	-1	0	1	2
$P(x)$	V	V	F	V	V
$Q(x)$	V	F	V	V	F

Trouver tous les contre-exemples dans E .

Exemple

Exercice 4 : attention au mot « ou » On considère la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \text{ est divisible par 2 ou par 3}) \implies n \text{ est divisible par 6}.$$

Construire un contre-exemple et expliquer pourquoi il est valide.

Exercices d'approfondissement**Exemple**

Exercice 5 : réparer une propriété fausse On considère la propriété :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 = b^2 \implies a = b.$$

1. Donner un contre-exemple.
2. Proposer une condition supplémentaire simple sur a et b qui rendrait la propriété vraie.

Exemple

Exercice 6 : analyser un mauvais contre-exemple Un élève veut réfuter la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \text{ impair et } n > 1) \implies n \text{ premier}.$$

Il propose $n = 2$ comme contre-exemple.

1. Expliquer pourquoi ce n'est pas un contre-exemple.
2. Donner un contre-exemple efficace.

Cours

Synthèse Pour montrer qu'une propriété universelle est fausse, on cherche un contre-exemple.

Pour une propriété de la forme :

$$\forall x \in E, \quad P(x) \implies Q(x),$$

un contre-exemple est un élément $c \in E$ tel que :

$$P(c) \text{ est vraie} \quad \text{et} \quad Q(c) \text{ est fausse.}$$

Un bon contre-exemple est :

- dans le bon ensemble ;
- conforme à toutes les hypothèses ;
- contraire à la conclusion ;
- simple et lisible.

Un seul contre-exemple suffit pour réfuter une propriété universelle.

Corrections détaillées**Exemple**

Correction de l'exercice 1

1. Propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 1 \implies x = 1.$$

Nombre proposé : -1 .

On vérifie l'hypothèse :

$$(-1)^2 = 1.$$

L'hypothèse est vraie.

On vérifie la conclusion :

$$-1 \neq 1.$$

La conclusion est fausse.

Donc -1 est bien un contre-exemple.

2. Propriété :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n \text{ multiple de } 4 \implies n \text{ pair.}$$

Nombre proposé : 8 .

On vérifie l'hypothèse : 8 est multiple de 4 , car :

$$8 = 4 \times 2.$$

On vérifie la conclusion : 8 est pair.

Ici, l'hypothèse est vraie et la conclusion est vraie. Donc 8 n'est pas un contre-exemple.

3. Propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < 0 \implies x^2 < 0.$$

Nombre proposé : -2 .

On vérifie l'hypothèse :

$$-2 < 0.$$

L'hypothèse est vraie.

On vérifie la conclusion :

$$(-2)^2 = 4.$$

Or :

$$4 \neq 0.$$

La conclusion est fausse.

Donc -2 est un contre-exemple.

Exemple

Correction de l'exercice 2

1. Propriété :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \text{ pair} \implies n + 1 \text{ pair.}$$

Prenons $n = 0$.

On a 0 pair, donc l'hypothèse est vraie. Mais :

$$n + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Or 1 n'est pas pair.

Donc $n = 0$ est un contre-exemple.

2. Propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \implies x^2 > x.$$

Prenons :

$$x = \frac{1}{2}.$$

On a :

$$\frac{1}{2} > 0.$$

L'hypothèse est vraie.

Mais :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Or :

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}.$$

Donc $x^2 > x$ est faux.

Ainsi, $x = \frac{1}{2}$ est un contre-exemple.

3. Propriété :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \implies a^2 < b^2.$$

Prenons :

$$a = -1 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

On a :

$$-1 < 0.$$

L'hypothèse est vraie.

Mais :

$$a^2 = (-1)^2 = 1 \quad \text{et} \quad b^2 = 0^2 = 0.$$

Donc :

$$a^2 < b^2$$

devient :

$$1 < 0,$$

ce qui est faux.

Ainsi, $(a, b) = (-1, 0)$ est un contre-exemple.

4. Propriété :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \text{ multiple de } 6 \implies n \text{ multiple de } 3.$$

Si n est multiple de 6, alors il existe un entier k tel que :

$$n = 6k.$$

Or :

$$6k = 3(2k).$$

Comme $2k$ est un entier, n est multiple de 3.

Il n'y a donc pas de contre-exemple : la propriété est vraie.

Exemple

Correction de l'exercice 3 On cherche les éléments $x \in E$ pour lesquels :

$$P(x) \text{ est vraie} \quad \text{et} \quad Q(x) \text{ est fausse.}$$

On lit le tableau colonne par colonne.

x	-2	-1	0	1	2
$P(x)$	V	V	F	V	V
$Q(x)$	V	F	V	V	F

- Pour $x = -2$, $P(x)$ est vraie et $Q(x)$ est vraie : ce n'est pas un contre-exemple.
- Pour $x = -1$, $P(x)$ est vraie et $Q(x)$ est fausse : c'est un contre-exemple.
- Pour $x = 0$, $P(x)$ est fausse : ce n'est pas un contre-exemple.
- Pour $x = 1$, $P(x)$ est vraie et $Q(x)$ est vraie : ce n'est pas un contre-exemple.
- Pour $x = 2$, $P(x)$ est vraie et $Q(x)$ est fausse : c'est un contre-exemple.

Les contre-exemples sont donc :

$$x = -1 \quad \text{et} \quad x = 2.$$

Exemple

Correction de l'exercice 4 Propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \text{ est divisible par 2 ou par 3}) \implies n \text{ est divisible par 6.}$$

Prenons :

$$n = 2.$$

On vérifie l'hypothèse.

Le nombre 2 est divisible par 2, car :

$$2 = 2 \times 1.$$

Donc l'affirmation :

$$n \text{ est divisible par 2 ou par 3}$$

est vraie.

On vérifie la conclusion.

Le nombre 2 n'est pas divisible par 6, car il n'existe pas d'entier k tel que :

$$2 = 6k.$$

La conclusion est donc fausse.

Ainsi, $n = 2$ est un contre-exemple.

Le mot « ou » est important : il suffit que n soit divisible par 2 ou par 3 pour que l'hypothèse soit vraie.

Exemple

Correction de l'exercice 5 Propriété :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 = b^2 \implies a = b.$$

1. Cherchons un contre-exemple.

Prenons :

$$a = 1 \quad \text{et} \quad b = -1.$$

On a :

$$a^2 = 1^2 = 1$$

et :

$$b^2 = (-1)^2 = 1.$$

Donc :

$$a^2 = b^2.$$

L'hypothèse est vraie.

Mais :

$$1 \neq -1.$$

La conclusion $a = b$ est fausse.

Donc $(a, b) = (1, -1)$ est un contre-exemple.

2. Pour rendre la propriété vraie, on peut ajouter la condition :

$$a \geq 0 \quad \text{et} \quad b \geq 0.$$

En effet, si $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $a^2 = b^2$, alors :

$$|a| = |b|.$$

Comme a et b sont positifs ou nuls :

$$|a| = a \quad \text{et} \quad |b| = b.$$

Donc :

$$a = b.$$

Une propriété corrigée possible est donc :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a \geq 0, b \geq 0 \text{ et } a^2 = b^2) \implies a = b.$$

Exemple

Correction de l'exercice 6 La propriété est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \text{ impair et } n > 1) \implies n \text{ premier.}$$

1. L'élève propose $n = 2$.

Vérifions l'hypothèse :

$$n \text{ impair et } n > 1.$$

Le nombre 2 vérifie bien $2 > 1$, mais il n'est pas impair. Il est pair.

Donc l'hypothèse n'est pas vérifiée.

Ainsi, $n = 2$ n'est pas un contre-exemple.

2. Cherchons un nombre naturel impair, strictement supérieur à 1, mais non premier.

Prenons :

$$n = 9.$$

On vérifie l'hypothèse :

$$9 \text{ est impair} \quad \text{et} \quad 9 > 1.$$

L'hypothèse est vraie.

Vérifions la conclusion : 9 n'est pas premier, car :

$$9 = 3 \times 3.$$

Il admet donc un diviseur autre que 1 et lui-même.

La conclusion est fausse.

Donc $n = 9$ est un contre-exemple efficace.

4 Négation de propositions quantifiées

CAP-1G_MATH_SPE-MATH-001-003-004

Pourquoi apprend-on cela ?

Cours

En mathématiques, une démonstration repose souvent sur des phrases comme :

- « Tous les nombres de tel ensemble vérifient une propriété » ;
- « Il existe au moins un objet qui vérifie une propriété » ;
- « Aucun objet ne vérifie cette propriété ».

Savoir écrire correctement la négation de ces phrases permet :

- de comprendre ce qu'il faut chercher pour réfuter une affirmation ;
- d'utiliser un contre-exemple ;
- de raisonner par l'absurde ;
- d'éviter les confusions entre « pas tous » et « aucun ».

Objectif

Cours

L'objectif est de savoir écrire, en langage courant et sans utiliser de symboles formels, la négation d'une proposition quantifiée simple.

Autrement dit, on veut être capable de transformer correctement des phrases comme :

« Tous les éléments vérifient une propriété. »

ou

« Il existe au moins un élément qui vérifie une propriété. »

en phrases qui disent exactement le contraire.

Prérequis utiles

Cours

- Une **proposition** est une phrase mathématique qui est soit vraie, soit fausse.
- La **négation** d'une proposition est une proposition qui a toujours la valeur de vérité opposée.
- Un **quantificateur** indique combien d'objets sont concernés :

- « tous », « pour chaque », « quel que soit » ;
- « il existe », « au moins un » ;
- « aucun ».

Cours

Cours

1. Ce qu'est une négation

La négation d'une proposition doit être vraie exactement quand la proposition de départ est fausse.

Par exemple, la négation de :

« Tous les élèves ont rendu le devoir. »

n'est pas :

« Aucun élève n'a rendu le devoir. »

La bonne négation est :

« Au moins un élève n'a pas rendu le devoir. »

En effet, pour que la phrase « Tous les élèves ont rendu le devoir » soit fausse, il suffit qu'un seul élève ne l'ait pas rendu.

Cours

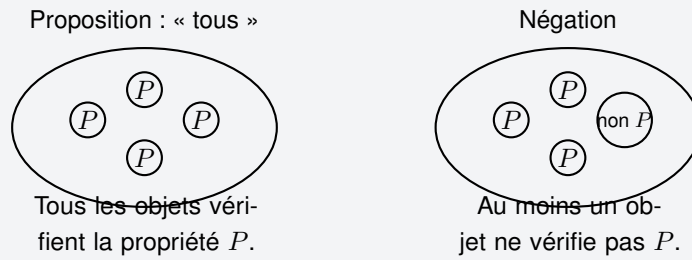
2. Les règles essentielles

Proposition	Négation correcte
Tous les objets vérifient la propriété.	Au moins un objet ne vérifie pas la propriété.
Pour chaque objet, la propriété est vraie.	Il existe au moins un objet pour lequel la propriété est fausse.
Il existe au moins un objet qui vérifie la propriété.	Aucun objet ne vérifie la propriété.
Aucun objet ne vérifie la propriété.	Au moins un objet vérifie la propriété.

Le point important est le suivant : lorsqu'on nie une phrase quantifiée, on change le quantificateur et on nie la propriété.

Cours

3. Visualiser la négation de « tous »



Ce schéma ne prouve pas une propriété générale. Il illustre seulement l'idée suivante : pour contredire une phrase commençant par « tous », un seul contre-exemple suffit.

Cours

4. Garder le même ensemble de départ

Pour écrire une négation correcte, il faut garder le même ensemble d'objets.

Exemple :

« Tous les nombres entiers sont positifs. »

La négation doit encore parler des nombres entiers :

« Au moins un nombre entier n'est pas positif. »

On ne doit pas changer le domaine en parlant soudain des nombres réels, des nombres rationnels ou d'une liste différente.

Méthode

Méthode

Pour écrire la négation d'une proposition quantifiée simple :

1. Repérer l'ensemble d'objets concernés.
Exemple : les réels, les élèves de la classe, les points d'une droite.
2. Repérer le quantificateur.
Exemple : « tous », « il existe », « aucun ».
3. Remplacer le quantificateur par son contraire logique :
 - « tous » devient « au moins un ... ne ... pas » ;
 - « il existe au moins un » devient « aucun » ;
 - « aucun » devient « au moins un ».
4. Nier précisément la propriété, sans changer le reste de la phrase.

5. Relire la phrase obtenue : elle doit être vraie exactement quand la phrase de départ est fausse.

Exemples corrigés

Exemple

Exemple 1

Écrire la négation de la proposition suivante :

« Tous les nombres de la liste sont positifs. »

Étape 1 : le quantificateur est « tous ».

Étape 2 : la négation de « tous » est « au moins un ... ne ... pas ».

Étape 3 : la propriété « être positif » devient « ne pas être positif ».

La négation est donc :

« Au moins un nombre de la liste n'est pas positif. »

Attention : dire « Tous les nombres de la liste sont négatifs » serait trop fort. Il suffit qu'un nombre soit nul ou négatif pour que la proposition de départ soit fausse.

Exemple

Exemple 2

Écrire la négation de la proposition suivante :

« Il existe au moins un réel dont le carré est égal à -1 . »

Étape 1 : l'ensemble concerné est celui des nombres réels.

Étape 2 : le quantificateur est « il existe au moins un ».

Étape 3 : sa négation est « aucun ».

La négation est donc :

« Aucun nombre réel n'a un carré égal à -1 . »

Erreurs fréquentes

Cours

Erreur 1 : confondre « pas tous » et « aucun »

Phrase de départ :

« Tous les élèves sont présents. »

Mauvaise négation :

« Aucun élève n'est présent. »

Pourquoi c'est faux : si un seul élève est absent, la phrase de départ est déjà fausse, même si tous les autres sont présents.

Bonne négation :

« Au moins un élève n'est pas présent. »

Cours

Erreur 2 : oublier de changer le quantificateur

Phrase de départ :

« Il existe au moins un triangle rectangle dans la figure. »

Mauvaise négation :

« Il existe au moins un triangle qui n'est pas rectangle dans la figure. »

Pourquoi c'est faux : les deux phrases peuvent être vraies en même temps s'il y a plusieurs triangles dans la figure.

Bonne négation :

« Aucun triangle de la figure n'est rectangle. »

Cours

Erreur 3 : changer l'ensemble étudié

Phrase de départ :

« Tous les entiers naturels sont positifs ou nuls. »

Une négation correcte doit encore parler des entiers naturels. On ne doit pas remplacer par les entiers relatifs ou par les réels.

Point de vigilance :

On garde le même domaine, et on nie seulement le quantificateur et la propriété.

Exercices d'application

Exemple

Exercice 1

Écrire en langage courant la négation de chacune des propositions suivantes.

1. Tous les rectangles sont des carrés.
2. Au moins un nombre entier est pair.
3. Aucun élève du groupe n'a oublié son cahier.
4. Tous les termes de cette suite sont strictement positifs.

Exemple

Exercice 2

Écrire en langage courant la négation de chacune des propositions suivantes.

1. Pour chaque réel, son carré est positif ou nul.
2. Il existe au moins un triangle ayant trois angles droits.
3. Aucun point de la droite ne appartient au cercle.
4. Tous les nombres de la liste sont inférieurs à 10.

Exemple

Exercice 3

Pour chaque phrase, écrire sa négation, puis préciser quel type de quantificateur a été modifié.

1. Il existe au moins un jour de la semaine où le club est ouvert.
2. Tous les points de la courbe sont situés au-dessus de l'axe des abscisses.
3. Aucun nombre de la liste n'est divisible par 3.

Exercices d'approfondissement

Exemple

Exercice 4

Écrire en langage courant la négation des propositions suivantes. Les phrases contiennent deux idées : il faut donc être particulièrement précis.

1. Chaque élève de la classe a réussi au moins un exercice.
2. Pour chaque nombre de la liste, il existe un nombre plus grand dans la même liste.

Exemple

Exercice 5

Une proposition affirme :

« Il existe un unique entier naturel dont le carré est égal à 4. »

Écrire sa négation en langage courant.

Synthèse

Cours

Pour nier une proposition quantifiée, il ne suffit pas d'ajouter « ne ... pas » quelque part dans la phrase.

À retenir :

- La négation de « tous » est « au moins un ... ne ... pas ».
- La négation de « il existe au moins un » est « aucun ».
- La négation de « aucun » est « au moins un ».
- On garde toujours le même ensemble d'objets.
- Pour réfuter une phrase commençant par « tous », un seul contre-exemple suffit.

Corrections détaillées

Exemple

Correction de l'exercice 1

1. Proposition : « Tous les rectangles sont des carrés. »
Le quantificateur est « tous ». Sa négation est donc « au moins un ... ne ... pas ».
Négation :

« Au moins un rectangle n'est pas un carré. »

2. Proposition : « Au moins un nombre entier est pair. »

Le quantificateur est « au moins un ». Sa négation est « aucun ».

Négation :

« Aucun nombre entier n'est pair. »

3. Proposition : « Aucun élève du groupe n'a oublié son cahier. »

Le quantificateur est « aucun ». Sa négation est « au moins un ».

Négation :

« Au moins un élève du groupe a oublié son cahier. »

4. Proposition : « Tous les termes de cette suite sont strictement positifs. »

Le quantificateur est « tous ». On garde le même ensemble : les termes de cette suite.

Négation :

« Au moins un terme de cette suite n'est pas strictement positif. »

Cela signifie qu'au moins un terme est nul ou négatif.

Exemple

Correction de l'exercice 2

1. Proposition : « Pour chaque réel, son carré est positif ou nul. »

« Pour chaque » joue le même rôle que « tous ». Sa négation est donc « il existe au moins un ... pour lequel ce n'est pas vrai ».

Négation :

« Il existe au moins un nombre réel dont le carré n'est pas positif ou nul. »

On peut aussi dire :

« Il existe au moins un nombre réel dont le carré est strictement négatif. »

2. Proposition : « Il existe au moins un triangle ayant trois angles droits. »

La négation de « il existe au moins un » est « aucun ».

Négation :

« Aucun triangle n'a trois angles droits. »

3. Proposition : « Aucun point de la droite ne appartient au cercle. »

La formulation correcte en français courant est : « Aucun point de la droite n'appartient au cercle. »

La négation de « aucun » est « au moins un ».

Négation :

« Au moins un point de la droite appartient au cercle. »

4. Proposition : « Tous les nombres de la liste sont inférieurs à 10. »

Le quantificateur est « tous ». La propriété « être inférieur à 10 » est niée.

Négation :

« Au moins un nombre de la liste n'est pas inférieur à 10. »

On peut aussi dire :

« Au moins un nombre de la liste est supérieur ou égal à 10. »

Exemple

Correction de l'exercice 3

1. Proposition : « Il existe au moins un jour de la semaine où le club est ouvert. »

Le quantificateur est de type existentiel : il affirme l'existence d'au moins un objet.

Sa négation est :

« Aucun jour de la semaine, le club n'est ouvert. »

Formulation plus naturelle :

« Le club n'est ouvert aucun jour de la semaine. »

2. Proposition : « Tous les points de la courbe sont situés au-dessus de l'axe des abscisses. »

Le quantificateur est universel : il concerne tous les points de la courbe.

Sa négation est :

« Au moins un point de la courbe n'est pas situé au-dessus de l'axe des abscisses. »

3. Proposition : « Aucun nombre de la liste n'est divisible par 3. »

Le quantificateur est « aucun ». Sa négation affirme l'existence d'au moins un exemple.

Sa négation est :

« Au moins un nombre de la liste est divisible par 3. »

Exemple

Correction de l'exercice 4

1. Proposition : « Chaque élève de la classe a réussi au moins un exercice. »

Cette phrase signifie : pour tous les élèves, on peut trouver au moins un exercice réussi.

Pour nier cette proposition, il faut dire qu'il existe au moins un élève pour lequel cela est faux.

Pour cet élève, la phrase « il a réussi au moins un exercice » est fausse. Donc il n'a réussi aucun exercice.

Négation :

« Il existe au moins un élève de la classe qui n'a réussi aucun exercice. »

2. Proposition : « Pour chaque nombre de la liste, il existe un nombre plus grand dans la même liste. »

La phrase commence par « pour chaque ». Sa négation commence donc par « il existe au moins un ».

Pour ce nombre particulier, la phrase « il existe un nombre plus grand dans la même liste » est fausse.

Négation :

« Il existe au moins un nombre de la liste pour lequel aucun nombre de la même liste n'est plus grand. »

Exemple**Correction de l'exercice 5**

Proposition :

« Il existe un unique entier naturel dont le carré est égal à 4. »

Le mot « unique » signifie : il en existe exactement un.

La négation de « il existe exactement un » est :

« il n'en existe pas exactement un ».

Cela peut arriver de deux façons :

- soit il n'en existe aucun ;
- soit il en existe au moins deux.

Négation :

« Aucun entier naturel n'a un carré égal à 4, ou bien au moins deux entiers naturels ont un carré égal à 4. »

Cette formulation est plus longue, mais elle est nécessaire : nier l'unicité ne signifie pas seulement nier l'existence.

Retrouver Jacob Formation



jacob-formation.fr