

Jacob Formation

Première générale – Mathématiques

Vocabulaire ensembliste de base

CHAP-1G_MATH_SPE-MATH-001-002

Objectif général

Maîtriser les notations et opérations ensemblistes nécessaires dans tout le programme.

Présentation du chapitre

Cours

Objectif du cours

Introduire les notions d'appartenance, de sous-ensemble, d'opérations ensemblistes et de cardinal.

Objectif des exercices

Manipuler des ensembles de nombres ou de solutions dans des situations simples.

Prérequis

Ensembles de nombres vus en seconde, Intervalles de $\mathbb{R}$ et droite graduée

Parcours du chapitre

1. Appartenance et inclusion

Utiliser correctement les notations d'appartenance et d'inclusion pour décrire des ensembles simples.

2. Opérations sur les ensembles

Construire des ensembles par réunion, intersection et complémentaire dans des situations concrètes.

3. Intervalles de réels et ensembles de nombres

Noter un ensemble de réels par un intervalle adapté en fonction d'une contrainte donnée.

4. Produit cartésien et couples

Relier le produit cartésien de deux ensembles à la notion de couple et à des exemples graphiques.

Table des matières

1	Appartenance et inclusion	2
2	Opérations sur les ensembles	10
3	Intervalles de réels et ensembles de nombres	23
4	Produit cartésien et couples	32

1 Appartenance et inclusion

CAP-1G_MATH_SPE-MATH-001-002-001

Appartenance et inclusion

Cours

Pourquoi apprend-on cela ? En mathématiques, on manipule très souvent des ensembles : ensembles de nombres, ensembles de solutions, intervalles, ensembles de points.

Savoir écrire correctement qu'un objet est dans un ensemble ou qu'un ensemble est contenu dans un autre évite beaucoup d'erreurs de raisonnement, notamment lors de la résolution d'équations ou d'inéquations.

Cours

Objectif de la capsule À la fin de cette capsule, il faut savoir :

- utiliser correctement les symboles $\in$ et $\notin$;
- utiliser correctement les symboles $\subseteq$ et $\not\subseteq$;
- distinguer un élément d'un ensemble ;
- distinguer appartenance et inclusion.

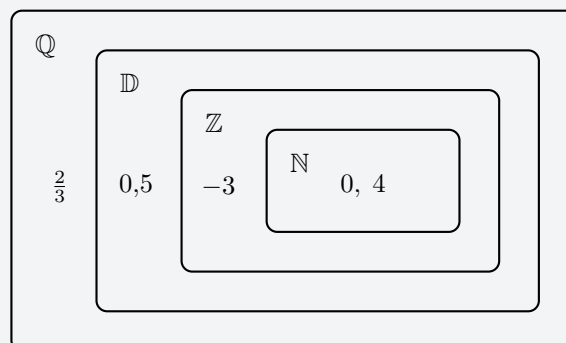
Cours

Prérequis utiles

- Les ensembles de nombres :

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

- Les intervalles de $\mathbb{R}$, par exemple $[-1 ; 3[$.
- La lecture d'une droite graduée.



Cette représentation montre les inclusions entre ensembles de nombres. Par exemple, tout entier naturel est un entier relatif, donc $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Cours

Cours

1. Ensemble et élément Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques, appelés ses **éléments**.

Si a est un élément de l'ensemble E , on écrit :

$$a \in E.$$

Si a n'est pas un élément de l'ensemble E , on écrit :

$$a \notin E.$$

Par exemple, si

$$A = \{-2; 0; 3; 5\},$$

alors :

$$3 \in A \quad \text{et} \quad 1 \notin A.$$

Cours

2. Inclusion Soient A et B deux ensembles.

On dit que A est **inclus** dans B lorsque tous les éléments de A sont aussi des éléments de B .

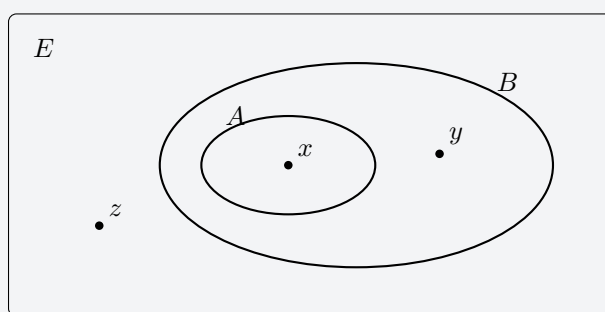
On écrit :

$$A \subseteq B.$$

Définition rigoureuse :

$$A \subseteq B \iff \text{pour tout } x, x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Pour montrer que $A \not\subseteq B$, il suffit de trouver un élément de A qui n'appartient pas à B .



Sur ce schéma :

$$x \in A, \quad x \in B, \quad y \in B, \quad y \notin A, \quad z \notin B.$$

Comme toute la zone A est contenue dans la zone B , on a :

$$A \subseteq B.$$

Cours

3. Appartenance ou inclusion : bien distinguer Le symbole $\in$ relie un **élément** à un **ensemble**.

Le symbole $\subseteq$ relie un **ensemble** à un **ensemble**.

Notation	Lecture	Nature des objets
$a \in A$	a appartient à A	élément $\rightarrow$ ensemble
$A \subseteq B$	A est inclus dans B	ensemble $\rightarrow$ ensemble

Attention :

$$2 \in \{1; 2; 3\}$$

mais

$$\{2\} \subseteq \{1; 2; 3\}.$$

Le nombre 2 est un élément. L'objet $\{2\}$ est un ensemble contenant un seul élément : c'est un singleton.

Cours

4. Inclusion et égalité d'ensembles Deux ensembles A et B sont égaux lorsqu'ils ont exactement les mêmes éléments.

Une méthode importante consiste à utiliser la double inclusion :

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A.$$

Deux propriétés utiles :

$$A \subseteq A$$

et

$$\emptyset \subseteq A.$$

L'ensemble vide $\emptyset$ ne contient aucun élément. Il est inclus dans tout ensemble.

Cours

5. Cas des intervalles Un intervalle est un ensemble de nombres réels.

Par exemple :

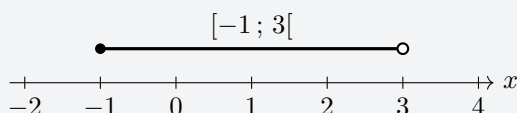
$$I = [-1; 3[$$

désigne l'ensemble des réels x tels que :

$$-1 \leq x < 3.$$

Donc :

$$-1 \in I, \quad 2 \in I, \quad 3 \notin I.$$



Le point plein signifie que -1 est inclus. Le point ouvert signifie que 3 est exclu.

Méthode

Méthode

Choisir entre $\in$ et $\subseteq$ Pour choisir le bon symbole, on suit trois étapes.

1. Identifier la nature de l'objet à gauche.

- Si c'est un nombre, un point, une solution : on pense à $\in$.
- Si c'est un ensemble, une liste entre accolades, un intervalle : on pense à $\subseteq$.

2. Identifier l'ensemble de droite.

3. Vérifier la phrase mathématique.

- $a \in A$ signifie : « a est un élément de A ».
- $A \subseteq B$ signifie : « tous les éléments de A sont dans B ».

Exemple corrigé

Exemple

Exemple : distinguer appartenance et inclusion On considère les ensembles :

$$A = \{1 ; 2 ; 3\} \quad \text{et} \quad B = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}.$$

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

$$2 \in A, \quad \{2\} \subseteq A, \quad A \subseteq B, \quad 4 \in A.$$

Correction détaillée.

- $2 \in A$ est vrai, car 2 est bien un élément de la liste qui définit A .
- $\{2\} \subseteq A$ est vrai, car l'unique élément de l'ensemble $\{2\}$, c'est-à-dire 2 , appartient à A .
- $A \subseteq B$ est vrai, car tous les éléments de A , c'est-à-dire $1, 2$ et 3 , appartiennent aussi à B .
- $4 \in A$ est faux, car 4 n'apparaît pas dans l'ensemble A .

Conclusion :

$$2 \in A, \quad \{2\} \subseteq A, \quad A \subseteq B, \quad 4 \notin A.$$

Erreurs fréquentes

Cours

Erreur 1 : confondre $\in$ et $\subseteq$ Écrire

$$2 \subseteq A$$

n'a pas de sens si 2 désigne un nombre. Un nombre est un élément, pas un ensemble.

Il faut écrire :

$$2 \in A.$$

Point de vigilance : $\in$ sert pour un élément, $\subseteq$ sert pour un ensemble.

Cours

Erreur 2 : confondre 2 et $\{2\}$ Le nombre 2 et l'ensemble $\{2\}$ ne sont pas le même objet.

On écrit :

$$2 \in \{1; 2; 3\}$$

mais :

$$\{2\} \subseteq \{1; 2; 3\}.$$

Astuce : les accolades $\{ \}$ indiquent un ensemble.

Cours

Erreur 3 : croire qu'une inclusion se vérifie avec un seul élément Pour montrer que $A \subseteq B$, il ne suffit pas de vérifier qu'un élément de A est dans B .

Il faut vérifier que **tous** les éléments de A sont dans B .

En revanche, pour montrer que $A \not\subseteq B$, un seul contre-exemple suffit.

Exercices d'application

Exemple

Exercice 1 On considère :

$$A = \{-2; 0; 3; 5\} \quad \text{et} \quad B = \{0; 3\}.$$

1. Compléter avec $\in$ ou $\notin$:

$$3 \dots A, \quad -1 \dots A, \quad 0 \dots B, \quad 5 \dots B.$$

2. Compléter avec $\subseteq$ ou $\not\subseteq$:

$$B \dots A, \quad A \dots B.$$

Exemple

Exercice 2 On considère :

$$A = \{1; 2; 4\}, \quad C = \{\{1\}; 2; 4\}, \quad D = \{1; 2; 4; 6\}.$$

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. Corriger les affirmations fausses lorsque c'est possible.

$$1 \in A, \quad \{1\} \in A, \quad \{1\} \subseteq A, \quad \{1\} \in C, \quad A \subseteq D.$$

Exemple

Exercice 3 On considère les intervalles :

$$I = [-2; 4[, \quad J =]-1; 3], \quad K = [-2; 5].$$

1. Déterminer si les nombres -2 , 3 et 4 appartiennent à I .
2. Déterminer si les inclusions suivantes sont vraies :

$$J \subseteq I, \quad I \subseteq K, \quad K \subseteq I.$$

Exercice d'approfondissement**Exemple**

Exercice 4 On considère les ensembles :

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}, \quad T = \{2; 3; 4\}, \quad U = [2; 3].$$

1. Déterminer l'ensemble S .
2. Écrire deux phrases mathématiques utilisant $\in$ ou $\notin$ pour les nombres 2 et 4 avec l'ensemble S .
3. Déterminer si les inclusions suivantes sont vraies :

$$S \subseteq T, \quad S \subseteq U, \quad U \subseteq T.$$

Synthèse**Cours**

À retenir

- $a \in A$ signifie que a est un élément de A .
- $a \notin A$ signifie que a n'est pas un élément de A .
- $A \subseteq B$ signifie que tous les éléments de A appartiennent à B .
- Pour prouver $A \not\subseteq B$, il suffit de trouver un élément de A qui n'est pas dans B .
- Un nombre a et le singleton $\{a\}$ sont deux objets différents.

Corrections détaillées

Exemple

Correction de l'exercice 1 On considère :

$$A = \{-2; 0; 3; 5\} \quad \text{et} \quad B = \{0; 3\}.$$

1. On vérifie si chaque nombre apparaît dans l'ensemble indiqué.

$$3 \in A$$

car 3 est dans la liste des éléments de A .

$$-1 \notin A$$

car -1 n'apparaît pas dans A .

$$0 \in B$$

car 0 est dans B .

$$5 \notin B$$

car 5 n'apparaît pas dans B .

2. Pour l'inclusion, on compare les ensembles.

Les éléments de B sont 0 et 3. Ils appartiennent tous les deux à A , donc :

$$B \subseteq A.$$

En revanche, A contient -2 et 5 , qui ne sont pas dans B . Donc :

$$A \not\subseteq B.$$

Exemple

Correction de l'exercice 2 On considère :

$$A = \{1; 2; 4\}, \quad C = \{\{1\}; 2; 4\}, \quad D = \{1; 2; 4; 6\}.$$

- $1 \in A$ est vrai, car 1 est un élément de A .

- $\{1\} \in A$ est faux. L'ensemble A contient le nombre 1, mais il ne contient pas le singleton $\{1\}$.
- $\{1\} \subseteq A$ est vrai, car l'unique élément de $\{1\}$, c'est-à-dire 1, appartient à A .
- $\{1\} \in C$ est vrai, car $\{1\}$ est explicitement l'un des éléments de C .
- $A \subseteq D$ est vrai, car tous les éléments de A , c'est-à-dire 1, 2 et 4, appartiennent à D .

Conclusion :

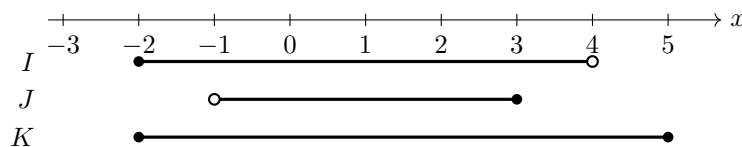
$$1 \in A, \quad \{1\} \notin A, \quad \{1\} \subseteq A, \quad \{1\} \in C, \quad A \subseteq D.$$

Exemple

Correction de l'exercice 3 On considère :

$$I = [-2; 4[, \quad J =]-1; 3], \quad K = [-2; 5].$$

Représentons les trois intervalles sur une droite graduée.



1. L'intervalle $I = [-2; 4[$ contient les réels x tels que :

$$-2 \leq x < 4.$$

Donc :

$$-2 \in I, \quad 3 \in I, \quad 4 \notin I.$$

Le crochet fermé en -2 signifie que -2 est inclus. Le crochet ouvert en 4 signifie que 4 est exclu.

2. On compare maintenant les intervalles.

L'intervalle $J =]-1; 3]$ est entièrement contenu dans $I = [-2; 4[$. Donc :

$$J \subseteq I.$$

L'intervalle $I = [-2; 4[$ est entièrement contenu dans $K = [-2; 5]$. Donc :

$$I \subseteq K.$$

En revanche, K n'est pas inclus dans I , car par exemple $5 \in K$ mais $5 \notin I$. Donc :

$$K \not\subseteq I.$$

Exemple

Correction de l'exercice 4 On considère :

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}, \quad T = \{2; 3; 4\}, \quad U = [2; 3].$$

1. On détermine d'abord l'ensemble des solutions de l'équation :

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

On factorise :

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Donc :

$$(x - 2)(x - 3) = 0.$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0.$$

Ainsi :

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 3.$$

Donc :

$$S = \{2; 3\}.$$

2. Comme $S = \{2; 3\}$, on a :

$$2 \in S.$$

En revanche, 4 n'est pas solution de l'équation, donc :

$$4 \notin S.$$

3. On étudie les inclusions.

Comme $S = \{2; 3\}$ et que 2 et 3 appartiennent tous les deux à $T = \{2; 3; 4\}$, on a :

$$S \subseteq T.$$

Comme $U = [2; 3]$ contient tous les réels entre 2 et 3, il contient en particulier 2 et 3. Donc :

$$S \subseteq U.$$

En revanche, $U \not\subseteq T$. Par exemple :

$$2,5 \in U$$

mais

$$2,5 \notin T.$$

Donc :

$$U \not\subseteq T.$$

2 Opérations sur les ensembles

Pourquoi apprend-on cela ?

Cours

En mathématiques, on manipule souvent des ensembles : ensembles de nombres, ensembles de solutions, ensembles de points, ensembles d'élèves vérifiant une condition.

Les opérations ensemblistes permettent de construire précisément de nouveaux ensembles :

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A^c.$$

Elles sont indispensables pour résoudre des inéquations, décrire des intervalles, compter des éléments et formuler correctement un raisonnement logique.

Objectif de la capsule

Cours

Savoir construire et interpréter :

- la réunion de deux ensembles ;
- l'intersection de deux ensembles ;
- le complémentaire d'un ensemble dans un ensemble de référence ;
- le cardinal d'ensembles finis obtenus par ces opérations.

Prérequis utiles

Cours

- Un ensemble est une collection d'objets appelés **éléments**.
- Si x est un élément de A , on écrit :

$$x \in A.$$

- Si tous les éléments de A appartiennent aussi à B , on écrit :

$$A \subset B.$$

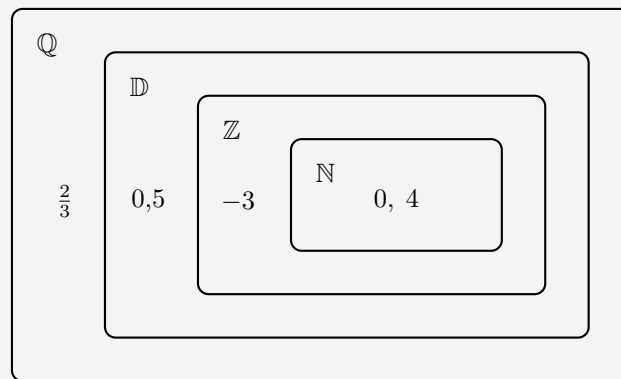
On dit que A est un **sous-ensemble** de B .

- Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des ensembles de nombres réels.

Cours

Les ensembles de nombres usuels sont emboîtés :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



Ce schéma signifie par exemple que tout entier naturel est un entier relatif, mais qu'un entier relatif comme -3 n'est pas un entier naturel.

Cours

1. Ensemble de référence

Cours

Pour parler d'un complémentaire, il faut toujours préciser un **ensemble de référence**, souvent noté E .

Si $A \subset E$, alors le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A .

On le note :

$$A^c \quad \text{ou} \quad E \setminus A.$$

Définition :

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Le complémentaire dépend donc de l'ensemble de référence choisi.

2. Réunion et intersection

Cours

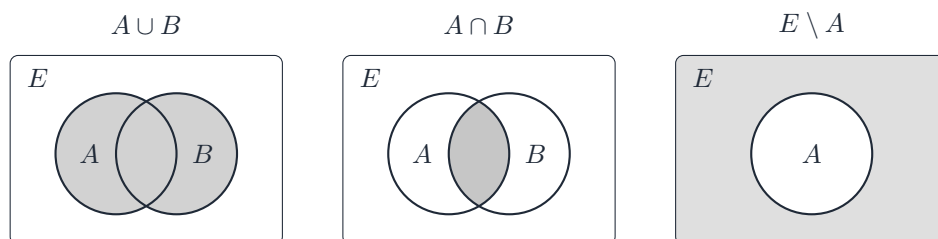
Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble de référence E .

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

La réunion $A \cup B$ contient les éléments qui sont dans A , dans B , ou dans les deux.

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

L'intersection $A \cap B$ contient les éléments communs à A et B .



Cours

Sur les schémas :

- la zone grisée de $A \cup B$ représente tout ce qui appartient à au moins l'un des deux ensembles ;
- la zone grisée de $A \cap B$ représente uniquement ce qui appartient aux deux ensembles ;
- la zone grisée de $E \setminus A$ représente ce qui est dans E , mais pas dans A .

3. Cas particulier : ensembles disjoints

Cours

Deux ensembles A et B sont **disjoints** lorsqu'ils n'ont aucun élément commun.

Cela se traduit par :

$$A \cap B = \emptyset.$$

Attention : deux ensembles disjoints peuvent avoir une réunion non vide.

4. Cardinal d'un ensemble fini

Cours

Si A est un ensemble fini, son **cardinal** est le nombre de ses éléments.

On le note :

$$\text{Card}(A) \quad \text{ou} \quad |A|.$$

Si A et B sont deux ensembles finis, alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

On soustrait $\text{Card}(A \cap B)$, car les éléments communs ont été comptés deux fois dans la somme $\text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

Méthode

Méthode

Pour construire un ensemble avec des opérations ensemblistes :

1. Identifier l'ensemble de référence E , s'il est nécessaire.
2. Repérer les éléments de A et les éléments de B .
3. Pour $A \cap B$, garder seulement les éléments communs.
4. Pour $A \cup B$, garder tous les éléments présents dans au moins un des deux ensembles.
5. Pour $E \setminus A$, garder les éléments de E qui ne sont pas dans A .
6. Pour un cardinal, compter les éléments sans doublon.

Méthode

Pour des intervalles de $\mathbb{R}$, il est très utile de raisonner sur une droite graduée.

- Une extrémité incluse se représente par un point plein.
- Une extrémité exclue se représente par un point vide.
- L'intersection correspond à la partie commune des intervalles.
- La réunion correspond à toute la zone couverte par au moins un intervalle.

Exemple corrigé

Exemple

On considère :

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\},$$

$$A = \{1; 2; 3; 4\} \quad \text{et} \quad B = \{3; 4; 5; 6\}.$$

Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $E \setminus A$, puis les cardinaux correspondants.

Exemple

Étape 1 : intersection.

Les éléments communs à A et B sont 3 et 4. Donc :

$$A \cap B = \{3; 4\}.$$

Étape 2 : réunion.

On regroupe tous les éléments qui appartiennent à A ou à B , sans écrire deux fois les éléments communs :

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Étape 3 : complémentaire.

On cherche les éléments de E qui ne sont pas dans A . Comme $A = \{1; 2; 3; 4\}$, il reste :

$$E \setminus A = \{5; 6; 7; 8\}.$$

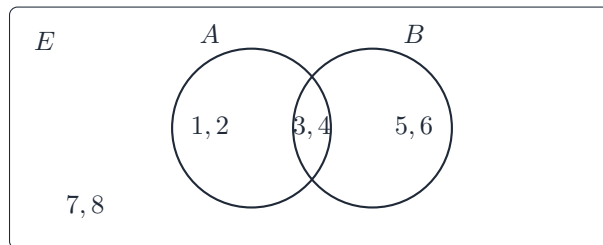
Étape 4 : cardinaux.

$$\text{Card}(A) = 4, \quad \text{Card}(B) = 4, \quad \text{Card}(A \cap B) = 2.$$

Donc :

$$\text{Card}(A \cup B) = 4 + 4 - 2 = 6.$$

On vérifie bien que $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ contient 6 éléments.

**Exemple**

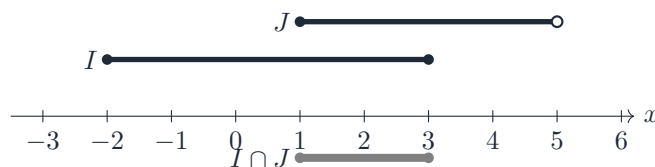
Le schéma montre que les nombres 3 et 4 sont dans la zone commune : ce sont les éléments de $A \cap B$. Les nombres 7 et 8 sont dans E , mais hors de A et hors de B .

Exemple avec des intervalles**Exemple**

On considère les intervalles :

$$I = [-2; 3] \quad \text{et} \quad J = [1; 5[.$$

Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

**Exemple**

La partie commune aux deux intervalles commence à 1 et se termine à 3. Les deux extrémités sont incluses.

Donc :

$$I \cap J = [1; 3].$$

Les deux intervalles se touchent et se recouvrent. Leur réunion forme un seul intervalle allant de -2 inclus à 5 exclu.

Donc :

$$I \cup J = [-2; 5[.$$

Erreurs fréquentes

Cours

Erreur 1 : confondre réunion et intersection.

$$A \cup B$$

signifie : dans A **ou** dans B .

$$A \cap B$$

signifie : dans A **et** dans B .

Astuce : l'intersection est souvent plus petite que chacun des deux ensembles.

Cours

Erreur 2 : oublier l'ensemble de référence pour le complémentaire.

Dire « le complémentaire de A » n'est pas suffisant si on ne sait pas dans quel ensemble on travaille.

Par exemple, le complémentaire de $[0; 1]$ n'est pas le même dans $\mathbb{R}$ que dans $[0; 2]$.

Cours

Erreur 3 : compter deux fois les éléments communs.

Si un élément appartient à $A \cap B$, il appartient à la fois à A et à B . Dans le calcul

$$\text{Card}(A) + \text{Card}(B),$$

il est donc compté deux fois.

C'est pourquoi on utilise :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Exercices d'application

Exemple

Exercice 1

On considère :

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\},$$
$$A = \{2; 4; 6; 8; 10\} \quad \text{et} \quad B = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Déterminer :

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad E \setminus A,$$

puis calculer :

$$\text{Card}(A), \quad \text{Card}(B), \quad \text{Card}(A \cap B), \quad \text{Card}(A \cup B).$$

Exemple

Exercice 2

On considère les intervalles :

$$I =] - 3; 2] \quad \text{et} \quad J = [0; 5[.$$

Déterminer :

$$I \cap J \quad \text{et} \quad I \cup J.$$

Représenter les deux intervalles sur une droite graduée.

Exemple

Exercice 3

Dans une classe de 32 élèves, on note :

- A l'ensemble des élèves inscrits à l'atelier théâtre ;
- B l'ensemble des élèves inscrits à l'atelier musique.

On sait que :

$$\text{Card}(A) = 14, \quad \text{Card}(B) = 11, \quad \text{Card}(A \cap B) = 5.$$

Calculer :

1. le nombre d'élèves inscrits à au moins un des deux ateliers ;
2. le nombre d'élèves inscrits à aucun des deux ateliers.

Exercices d'approfondissement

Exemple

Exercice 4

On considère les ensembles de réels :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4\}$$

et

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}.$$

Déterminer :

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad \mathbb{R} \setminus A.$$

Exemple

Exercice 5

On considère un ensemble de référence E , et deux sous-ensembles A et B de E .

On suppose que :

$$A \subset B.$$

Répondre aux questions suivantes en justifiant :

1. Que vaut $A \cap B$?
2. Que vaut $A \cup B$?
3. Peut-on avoir $B \subset A$ sans avoir $A = B$?

Synthèse

Cours

À retenir :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Pour des ensembles finis :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

La réunion correspond à « au moins l'un des deux ». L'intersection correspond à « les deux à la fois ». Le complémentaire correspond à « dans l'ensemble de référence, mais pas dans l'ensemble ».

Corrections détaillées

Correction de l'exercice 1

Exemple

On a :

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\},$$

$$A = \{2; 4; 6; 8; 10\}, \quad B = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Intersection.

Les éléments communs à A et B sont 2 et 4. Donc :

$$A \cap B = \{2; 4\}.$$

Réunion.

On regroupe tous les éléments appartenant à A ou à B , sans doublon :

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10\}.$$

Complémentaire de A dans E .

On garde les éléments de E qui ne sont pas dans A :

$$E \setminus A = \{1; 3; 5; 7; 9\}.$$

Cardinaux.

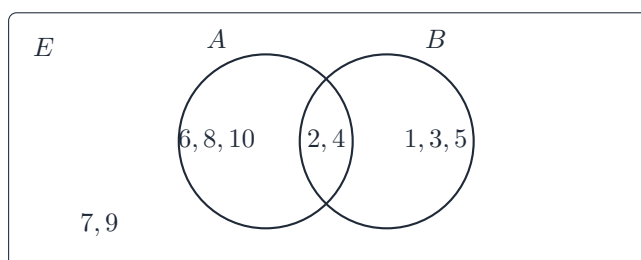
$$\text{Card}(A) = 5, \quad \text{Card}(B) = 5, \quad \text{Card}(A \cap B) = 2.$$

Donc :

$$\text{Card}(A \cup B) = 5 + 5 - 2 = 8.$$

Cela correspond bien aux 8 éléments de l'ensemble

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10\}.$$



Correction de l'exercice 2

Exemple

On considère :

$$I =] - 3; 2] \quad \text{et} \quad J = [0; 5[.$$

Intersection.

La partie commune aux deux intervalles commence à 0 et se termine à 2.

Le nombre 0 appartient à J et aussi à I , car $0 > -3$ et $0 \leq 2$.

Le nombre 2 appartient à I , et il appartient aussi à J , car $2 < 5$.

Donc :

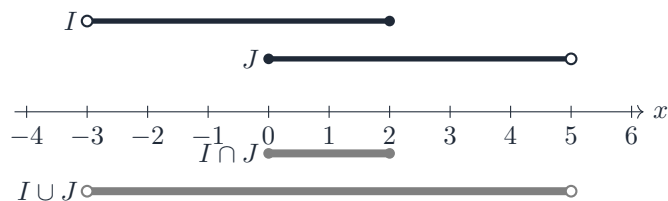
$$I \cap J = [0; 2].$$

Réunion.

L'intervalle I couvre les réels strictement supérieurs à -3 jusqu'à 2 inclus. L'intervalle J couvre les réels de 0 inclus jusqu'à 5 exclu.

Les deux intervalles se recouvrent entre 0 et 2, donc la réunion forme un seul intervalle :

$$I \cup J =] - 3; 5[.$$



Correction de l'exercice 3

Exemple

On note :

$$\text{Card}(A) = 14, \quad \text{Card}(B) = 11, \quad \text{Card}(A \cap B) = 5.$$

1. Élèves inscrits à au moins un atelier.

Être inscrit à au moins un des deux ateliers signifie appartenir à :

$$A \cup B.$$

On utilise la formule :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Donc :

$$\text{Card}(A \cup B) = 14 + 11 - 5 = 20.$$

Il y a donc 20 élèves inscrits à au moins un atelier.

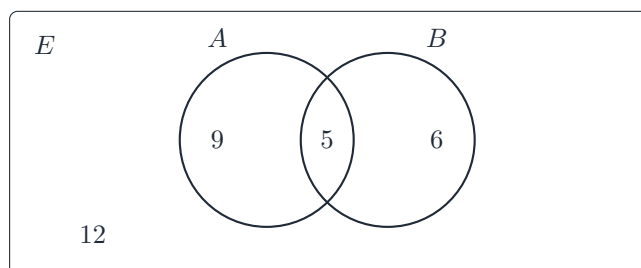
2. Éléves inscrits à aucun atelier.

La classe contient 32 élèves. Les élèves inscrits à aucun atelier sont ceux qui ne sont pas dans $A \cup B$.

Donc :

$$32 - 20 = 12.$$

Il y a donc 12 élèves inscrits à aucun des deux ateliers.



Exemple

Dans le schéma :

- 5 élèves sont dans les deux ateliers ;
- $14 - 5 = 9$ élèves sont uniquement dans A ;
- $11 - 5 = 6$ élèves sont uniquement dans B ;
- 12 élèves sont dans aucun des deux ateliers.

Correction de l'exercice 4

Exemple

On a :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4\} = [-1; 4[$$

et

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} =]2; +\infty[.$$

Intersection.

On cherche les réels qui appartiennent à la fois à A et à B .

Ils doivent vérifier :

$$-1 \leq x < 4 \quad \text{et} \quad x > 2.$$

Cela donne :

$$2 < x < 4.$$

Donc :

$$A \cap B =]2; 4[.$$

Réunion.

L'ensemble A contient les réels de -1 inclus à 4 exclu. L'ensemble B contient tous les réels strictement supérieurs à 2 .

En réunissant les deux, on obtient tous les réels à partir de -1 inclus, sans interruption :

$$A \cup B = [-1; +\infty[.$$

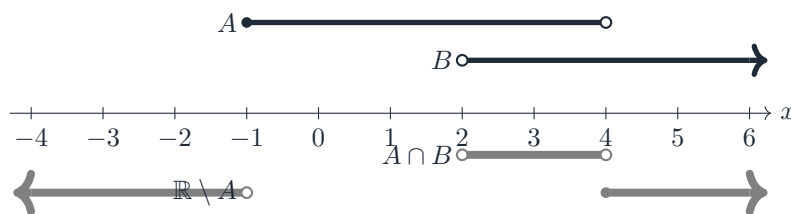
Complémentaire de A dans $\mathbb{R}$.

On enlève de $\mathbb{R}$ les réels de $[-1; 4[$.

Il reste :

$$\mathbb{R} \setminus A =]-\infty; -1] \cup [4; +\infty[.$$

Le nombre -1 n'est pas dans le complémentaire, car $-1 \in A$. Le nombre 4 est dans le complémentaire, car $4 \notin A$.

**Correction de l'exercice 5****Exemple**

On suppose que :

$$A \subset B.$$

Cela signifie que tout élément de A appartient aussi à B .

1. Intersection.

L'intersection $A \cap B$ contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B .

Comme tous les éléments de A sont déjà dans B , les éléments communs sont exactement les éléments de A .

Donc :

$$A \cap B = A.$$

2. Réunion.

La réunion $A \cup B$ contient les éléments qui sont dans A ou dans B .

Mais comme $A \subset B$, ajouter A à B ne crée aucun nouvel élément.

Donc :

$$A \cup B = B.$$

3. Peut-on avoir $B \subset A$ sans avoir $A = B$?

Si on a à la fois :

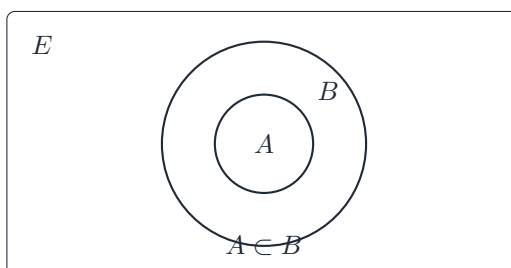
$$A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A,$$

alors les deux ensembles ont exactement les mêmes éléments.

Donc :

$$A = B.$$

On ne peut donc pas avoir $B \subset A$ en plus de $A \subset B$ sans avoir $A = B$.



Exemple

Le schéma illustre que A est entièrement contenu dans B . Il ne constitue pas une preuve à lui seul : la justification repose sur la définition de l'inclusion.

3 Intervalles de réels et ensembles de nombres

CAP-1G_MATH_SPE-MATH-001-002-003

Intervalles de réels et ensembles de nombres

Cours

Pourquoi apprend-on cela ? En mathématiques, on doit souvent décrire tous les nombres réels qui vérifient une contrainte.

Par exemple :

$$x \geq 2, \quad -1 < x \leq 4, \quad x < 0 \text{ ou } x \geq 3.$$

Écrire ces ensembles avec des intervalles permet d'être plus précis, plus rapide et plus lisible. Cette notation est utilisée dans l'étude de fonctions, les inéquations, les probabilités continues et les domaines de définition.

Cours

Objectif Savoir noter un ensemble de réels par un intervalle adapté à partir d'une contrainte donnée.

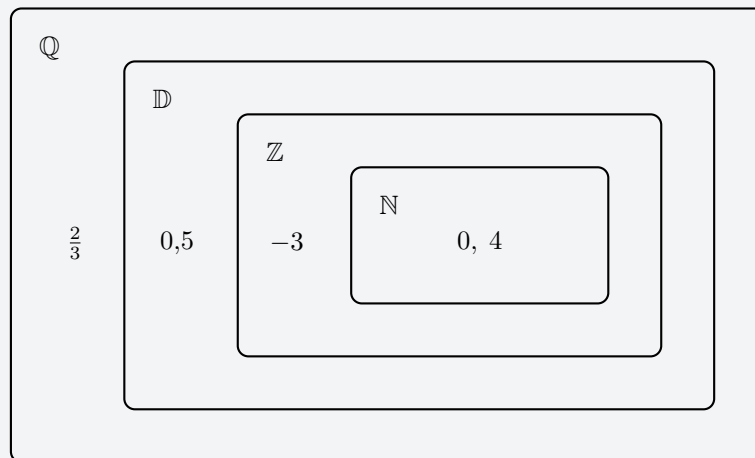
À la fin de cette capsule, il faut savoir passer de :

contrainte sur x $\longleftrightarrow$ intervalle $\longleftrightarrow$ représentation sur une droite graduée.

Cours

Prérequis utiles 1. Les principaux ensembles de nombres

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



2. Appartenance

Si un nombre appartient à un ensemble, on écrit :

$$3 \in \mathbb{N}.$$

S'il n'appartient pas à un ensemble, on écrit :

$$-2 \notin \mathbb{N}.$$

3. Sous-ensemble

Dire que $A \subset B$ signifie que tout élément de A appartient aussi à B . Par exemple :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Cours

Cours : écrire un intervalle Un **intervalle de réels** est un ensemble de nombres réels situés entre deux bornes, ou au-delà d'une borne.

1. Bornes incluses ou exclues

Soient a et b deux réels avec $a < b$.

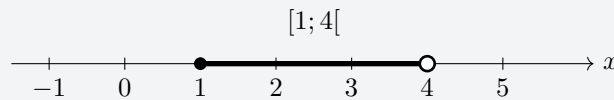
$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Les crochets vers l'intérieur signifient que les bornes sont incluses.

$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Les crochets vers l'extérieur signifient que les bornes sont exclues.

$$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \quad]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$



Sur cette droite graduée, 1 est inclus, car le point est plein. Le nombre 4 est exclu, car le point est vide.

Cours

Cours : intervalles non bornés Certains ensembles de réels n'ont pas de borne à gauche ou pas de borne à droite.

$$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

$$]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}.$$

$$]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}.$$

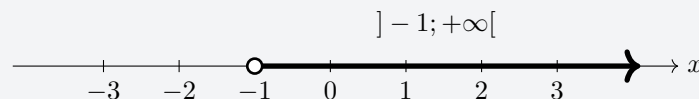
$$]-\infty; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.$$

Attention :

$$+\infty \quad \text{et} \quad -\infty$$

ne sont pas des nombres réels. Ils ne sont donc jamais inclus. On écrit toujours un crochet ouvert du côté de l'infini :

$$]-\infty; b], \quad [a; +\infty[.$$



Cette représentation correspond à tous les réels strictement supérieurs à -1 .

Cours

Cours : contraintes avec « et » ou « ou » Les mots **et** et **ou** ont un rôle important.

$$x \geq 1 \text{ et } x < 4$$

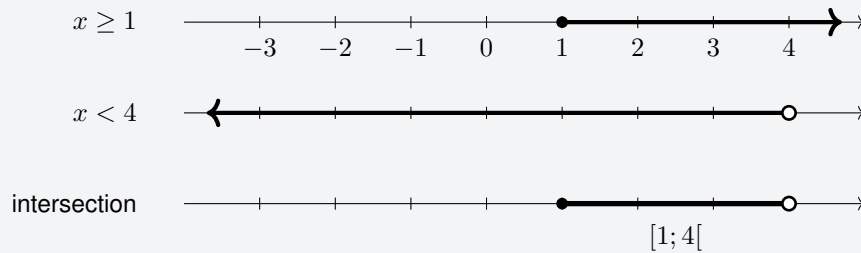
signifie que les deux contraintes doivent être vraies en même temps. On obtient une **intersection** :

$$[1; +\infty[\cap]-\infty; 4[= [1; 4[.$$

$$x < 1 \text{ ou } x \geq 4$$

signifie qu'au moins une des contraintes doit être vraie. On obtient une **réunion** :

$$]-\infty; 1[\cup [4; +\infty[.$$



Méthode

Méthode : passer d'une contrainte à un intervalle Pour écrire l'ensemble des réels x qui vérifient une contrainte :

1. Repérer les bornes.
2. Regarder si chaque borne est incluse ou exclue.
3. Choisir le crochet :

$$\leq \text{ ou } \geq \Rightarrow \text{borne incluse,} \quad < \text{ ou } > \Rightarrow \text{borne exclue.}$$

4. Si la contrainte va vers l'infini, écrire un crochet ouvert du côté de l'infini.
5. En présence de « et », chercher la partie commune.
6. En présence de « ou », réunir les parties possibles.

Contrainte	Intervalle correspondant
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$
$a < x < b$	$]a; b[$
$a \leq x < b$	$[a; b[$
$x \geq a$	$[a; +\infty[$
$x < a$	$] -\infty; a[$

Exemple

Exemple corrigé **Énoncé.** Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des réels x vérifiant :

$$-2 < x \leq 3.$$

Correction.

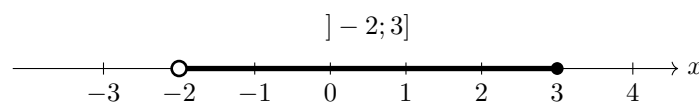
Les bornes sont -2 et 3 .

La contrainte $-2 < x$ signifie que -2 est exclu. On utilise donc un crochet ouvert en -2 .

La contrainte $x \leq 3$ signifie que 3 est inclus. On utilise donc un crochet fermé en 3 .

Ainsi :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\} =]-2; 3].$$



Conclusion. L'ensemble cherché est :

$$]-2; 3].$$

Cours

Erreurs fréquentes **Erreur 1 : confondre crochet ouvert et crochet fermé.**

Écrire $[2; 5]$ pour $2 < x < 5$ est faux, car les nombres 2 et 5 ne vérifient pas les inégalités strictes.

Pour éviter cette erreur :

$$< \text{ ou } > \Rightarrow \text{crochet ouvert}, \quad \leq \text{ ou } \geq \Rightarrow \text{crochet fermé}.$$

Erreur 2 : fermer un intervalle en $+\infty$ ou en $-\infty$.

On n'écrit jamais $[2; +\infty]$. L'infini n'est pas un nombre réel.

La bonne notation est :

$$[2; +\infty[.$$

Erreur 3 : inverser les bornes.

On n'écrit pas $[5; 2]$ pour décrire les réels entre 2 et 5 . La borne de gauche doit être la plus petite.

La bonne notation est :

$$[2; 5].$$

Erreur 4 : confondre « et » et « ou ».

Avec « et », on cherche les nombres qui vérifient toutes les contraintes. Avec « ou », on accepte plusieurs zones possibles.

Exercices d'application

Exemple

Exercice 1 Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des réels x vérifiant chaque contrainte.

1. $1 \leq x \leq 6$
2. $-3 < x < 2$
3. $x \geq -1$
4. $x < 4$
5. $0 \leq x < 7$

Exemple

Exercice 2 Pour chaque intervalle, écrire la contrainte correspondante sur x , puis représenter l'ensemble sur une droite graduée.

1. $] - 2; 5]$
2. $[0; +\infty[$
3. $] - \infty; 3[$

Exemple

Exercice 3 Écrire sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles l'ensemble des réels x vérifiant chaque condition.

1. $x \geq 2$ et $x < 8$
2. $x < -1$ ou $x \geq 4$
3. $-5 \leq x$ et $x \leq 1$
4. $x > 0$ ou $x \leq -2$

Exercices d'approfondissement

Exemple

Exercice 4 Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient chaque inéquation, puis l'écrire sous forme d'intervalle.

1. $2x - 3 \leq 5$
2. $-3x + 1 < 10$
3. $4 \leq 2x + 6 < 12$

Exemple

Exercice 5 On considère les ensembles :

$$A = [-2; 4[, \quad B =]1; 6].$$

1. Représenter A et B sur une droite graduée.
2. Déterminer $A \cap B$.
3. Déterminer $A \cup B$.

Cours

Synthèse Pour noter correctement un ensemble de réels par un intervalle :

- une inégalité large $\leq$ ou $\geq$ donne une borne incluse ;
- une inégalité stricte $<$ ou $>$ donne une borne exclue ;
- $+\infty$ et $-\infty$ ne sont jamais inclus ;
- le mot « et » correspond à une intersection ;
- le mot « ou » correspond à une réunion ;
- une droite graduée permet de vérifier visuellement les bornes et les zones retenues.

Les trois écritures suivantes doivent raconter la même chose :

$$-2 < x \leq 3 \quad \longleftrightarrow \quad] - 2; 3] \quad \longleftrightarrow \quad \text{segment de } - 2 \text{ exclu à } 3 \text{ inclus.}$$

Corrections détaillées**Exemple**

Correction de l'exercice 1

1. $1 \leq x \leq 6$

Les deux bornes sont incluses, car les inégalités sont larges.

$$[1; 6].$$

2. $-3 < x < 2$

Les deux bornes sont exclues, car les inégalités sont strictes.

$$]- 3; 2[.$$

3. $x \geq -1$

Le nombre -1 est inclus et l'ensemble part vers $+\infty$.

$$[-1; +\infty[.$$

4. $x < 4$

Le nombre 4 est exclu et l'ensemble vient de $-\infty$.

$$]-\infty; 4[.$$

5. $0 \leq x < 7$

Le nombre 0 est inclus et le nombre 7 est exclu.

$$[0; 7[.$$

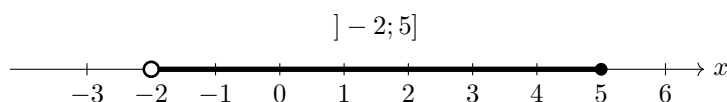
Exemple

Correction de l'exercice 2

1. $] - 2; 5]$

Le crochet est ouvert en -2 , donc -2 est exclu. Le crochet est fermé en 5 , donc 5 est inclus.

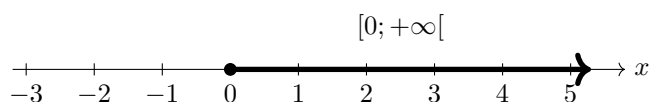
$$-2 < x \leq 5.$$



2. $[0; +\infty[$

Le nombre 0 est inclus. L'intervalle contient tous les réels supérieurs ou égaux à 0.

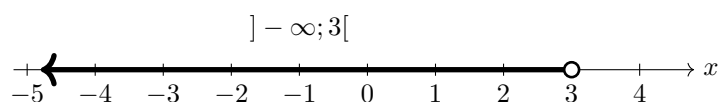
$$x \geq 0.$$



3. $] - \infty; 3[$

Le nombre 3 est exclu. L'intervalle contient tous les réels strictement inférieurs à 3.

$$x < 3.$$



Exemple

Correction de l'exercice 3

1. $x \geq 2$ et $x < 8$

Le mot « et » signifie que les deux conditions doivent être vérifiées simultanément. On garde donc les réels compris entre 2 inclus et 8 exclu.

$$[2; 8[.$$

2. $x < -1$ ou $x \geq 4$

Le mot « ou » signifie qu'on accepte l'une ou l'autre des deux zones. On obtient une réunion d'intervalles :

$$]-\infty; -1[\cup [4; +\infty[.$$

3. $-5 \leq x$ et $x \leq 1$

Les deux contraintes donnent :

$$x \geq -5 \quad \text{et} \quad x \leq 1.$$

Les deux bornes sont incluses.

$$[-5; 1].$$

4. $x > 0$ ou $x \leq -2$

On accepte les réels strictement positifs ou les réels inférieurs ou égaux à -2 .

$$]-\infty; -2] \cup]0; +\infty[.$$

Exemple

Correction de l'exercice 4

1. $2x - 3 \leq 5$

On isole x .

$$2x - 3 \leq 5$$

$$2x \leq 8$$

$$x \leq 4.$$

L'ensemble solution est :

$$]-\infty; 4].$$

2. $-3x + 1 < 10$

On isole x .

$$-3x + 1 < 10$$

$$-3x < 9.$$

On divise par -3 . Comme -3 est négatif, le sens de l'inégalité change :

$$x > -3.$$

L'ensemble solution est :

$$]-3; +\infty[.$$

3. $4 \leq 2x + 6 < 12$

On travaille sur les trois membres de l'encadrement.

On soustrait 6 :

$$4 - 6 \leq 2x + 6 - 6 < 12 - 6.$$

Donc :

$$-2 \leq 2x < 6.$$

On divise par 2, qui est positif, donc le sens des inégalités ne change pas :

$$-1 \leq x < 3.$$

L'ensemble solution est :

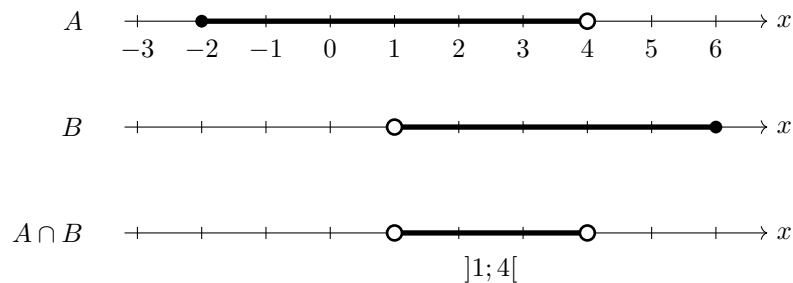
$$\boxed{[-1; 3[}.$$

Exemple

Correction de l'exercice 5 On considère :

$$A = [-2; 4[, \quad B =]1; 6].$$

1. Représentation graphique



2. Intersection

L'intersection $A \cap B$ contient les réels appartenant à A et à B .

Les deux ensembles se recouvrent entre 1 et 4. Le nombre 1 n'appartient pas à B , donc il est exclu. Le nombre 4 n'appartient pas à A , donc il est exclu.

Ainsi :

$$\boxed{A \cap B =]1; 4[}.$$

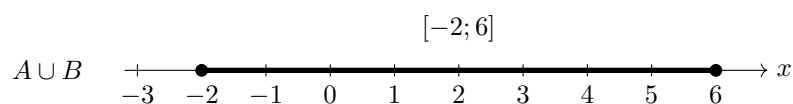
3. Réunion

La réunion $A \cup B$ contient les réels appartenant à A ou à B .

Les deux intervalles se touchent et se recouvrent partiellement. L'ensemble total va de -2 inclus à 6 inclus.

Ainsi :

$$\boxed{A \cup B = [-2; 6]}.$$



4 Produit cartésien et couples

Produit cartésien et couples

Cours

Pourquoi apprend-on cela ? En mathématiques, on manipule souvent des objets formés de deux informations ordonnées :

abscisse et ordonnée, entrée et sortie, ligne et colonne.

Le produit cartésien permet de décrire rigoureusement tous les couples possibles formés avec deux ensembles.

Cette notion est indispensable pour comprendre les points du plan, les ensembles de solutions d'équations à deux inconnues, les tableaux à double entrée et certaines représentations graphiques.

Cours

Objectif Savoir relier :

$A \times B \longleftrightarrow$ ensemble de couples $\longleftrightarrow$ représentation graphique dans un repère.

À la fin de la capsule, il faut savoir :

- définir un couple ;
- définir le produit cartésien de deux ensembles ;
- lister les éléments d'un produit cartésien fini ;
- représenter graphiquement un produit cartésien simple ;
- calculer son cardinal lorsque les ensembles sont finis.

Cours

Prérequis utiles

- La notation d'appartenance : $x \in A$ signifie que x appartient à l'ensemble A .
- La notation de non-appartenance : $x \notin A$.
- Le cardinal d'un ensemble fini : $\text{Card}(A)$ est le nombre d'éléments de A .
- Les intervalles de $\mathbb{R}$, par exemple $[1; 3]$, $[0; 2[$.
- Dans un repère, un point est repéré par un couple de coordonnées $(x; y)$.

Cours

Cours

1. Couple : l'ordre compte Un **couple** est une paire ordonnée, notée $(a; b)$.

Le premier élément est a , le second est b . L'ordre est essentiel :

$$(a; b) \neq (b; a)$$

en général.

Deux couples sont égaux si et seulement si leurs premières coordonnées sont égales et leurs secondes coordonnées sont égales :

$$(a; b) = (c; d) \iff a = c \text{ et } b = d.$$

Par exemple :

$$(2; 5) \neq (5; 2),$$

car le premier élément n'est pas le même.

Cours

2. Produit cartésien de deux ensembles Soient A et B deux ensembles.

Le **produit cartésien** de A par B , noté $A \times B$, est l'ensemble de tous les couples $(a; b)$ tels que :

$$a \in A \text{ et } b \in B.$$

On écrit :

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Le premier élément du couple vient toujours de A , le second vient toujours de B .

Cours

3. Exemple visuel avec deux ensembles finis On prend :

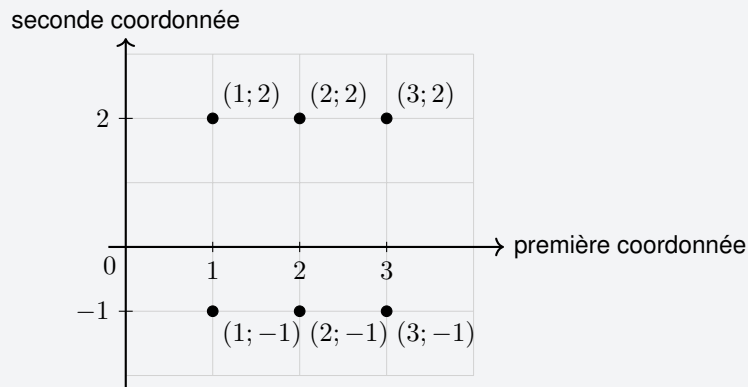
$$A = \{1; 2; 3\} \quad \text{et} \quad B = \{-1; 2\}.$$

Alors :

$$A \times B = \{(1; -1), (1; 2), (2; -1), (2; 2), (3; -1), (3; 2)\}.$$

On peut relier trois représentations.

	-1	2
1	(1; -1)	(1; 2)
2	(2; -1)	(2; 2)
3	(3; -1)	(3; 2)



Chaque point placé correspond à un couple de $A \times B$. La première coordonnée est choisie dans A , la seconde dans B .

Cours

4. Produit cartésien et ordre des ensembles En général :

$$A \times B \neq B \times A.$$

Par exemple, si $A = \{1; 2\}$ et $B = \{5\}$, alors :

$$A \times B = \{(1; 5), (2; 5)\},$$

tandis que :

$$B \times A = \{(5; 1), (5; 2)\}.$$

Les deux ensembles n'ont pas les mêmes couples, car les coordonnées sont inversées.

Cours

5. Cardinal d'un produit cartésien fini Si A et B sont deux ensembles finis, alors :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B).$$

Cette propriété signifie que chaque élément de A peut être associé à chaque élément de B .

Si A ou B est vide, alors :

$$A \times B = \emptyset.$$

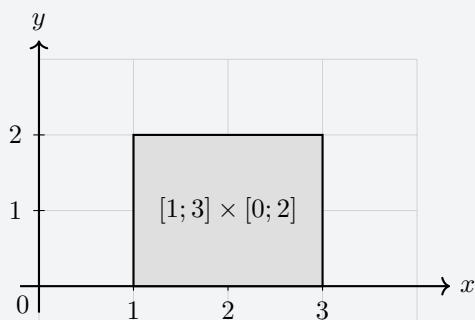
Dans ce cas, il n'existe aucun couple possible.

Cours

6. Produit cartésien d'intervalles Lorsque A et B sont des intervalles de $\mathbb{R}$, le produit cartésien $A \times B$ correspond à une zone du plan.

Par exemple :

$$[1; 3] \times [0; 2] = \{(x; y) \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ et } 0 \leq y \leq 2\}.$$



Graphiquement, la première condition limite les abscisses, et la seconde limite les ordonnées.

Méthode

Méthode

Lister un produit cartésien fini Pour déterminer $A \times B$, on peut procéder ainsi.

1. Identifier les éléments de A .
2. Identifier les éléments de B .
3. Fixer un élément de A .
4. L'associer successivement à tous les éléments de B .
5. Recommencer avec chaque élément de A .
6. Vérifier que chaque couple est de la forme $(a; b)$, avec $a \in A$ et $b \in B$.

Si les ensembles sont finis, on peut contrôler le nombre de couples avec :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B).$$

Méthode

Représenter graphiquement un produit cartésien Pour représenter $A \times B$ dans un repère :

1. placer les éléments de A sur l'axe horizontal ;
2. placer les éléments de B sur l'axe vertical ;
3. placer tous les points de coordonnées $(a; b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$.

Pour un produit d'intervalles $I \times J$, on représente la zone des points $(x; y)$ tels que :

$$x \in I \quad \text{et} \quad y \in J.$$

Exemple corrigé

Exemple

Énoncé On considère :

$$A = \{0; 2\} \quad \text{et} \quad B = \{a; b; c\}.$$

1. Déterminer $A \times B$.
2. Calculer $\text{Card}(A \times B)$.
3. Dire si $(2; b)$ et $(b; 2)$ appartiennent à $A \times B$.

Exemple

Correction **1. Déterminer $A \times B$.**

Le premier élément du couple doit appartenir à A . Il vaut donc 0 ou 2.

Le second élément du couple doit appartenir à B . Il vaut donc a , b ou c .

Ainsi :

$$A \times B = \{(0; a), (0; b), (0; c), (2; a), (2; b), (2; c)\}.$$

2. Calculer le cardinal.

On a :

$$\text{Card}(A) = 2 \quad \text{et} \quad \text{Card}(B) = 3.$$

Donc :

$$\text{Card}(A \times B) = 2 \times 3 = 6.$$

3. Tester l'appartenance.

Le couple $(2; b)$ appartient à $A \times B$, car :

$$2 \in A \quad \text{et} \quad b \in B.$$

En revanche, $(b; 2)$ n'appartient pas à $A \times B$, car le premier élément devrait appartenir à A , or :

$$b \notin A.$$

Donc :

$$(2; b) \in A \times B \quad \text{et} \quad (b; 2) \notin A \times B.$$

Erreurs fréquentes

Cours

Erreur 1 : confondre $(a; b)$ et $(b; a)$ **Erreur** : croire que $(2; 5) = (5; 2)$.

Pourquoi c'est faux : dans un couple, l'ordre compte. Le premier élément et le second élément n'ont pas le même rôle.

À retenir :

$$(a; b) = (c; d) \iff a = c \text{ et } b = d.$$

Cours

Erreur 2 : oublier des couples **Erreur** : si $A = \{1; 2\}$ et $B = \{3; 4\}$, écrire seulement $(1; 3)$ et $(2; 4)$.

Pourquoi c'est faux : chaque élément de A doit être associé à chaque élément de B .

Astuce : utiliser un tableau à double entrée pour ne rien oublier.

Cours

Erreur 3 : inverser les ensembles **Erreur** : confondre $A \times B$ et $B \times A$.

Pourquoi c'est faux : dans $A \times B$, le premier élément vient de A . Dans $B \times A$, le premier élément vient de B .

Point de vigilance : regarder toujours l'ordre écrit autour du symbole $\times$.

Exercices d'application**Exemple**

Exercice 1 On considère :

$$E = \{-1; 4\} \quad \text{et} \quad F = \{0; 3\}.$$

1. Déterminer $E \times F$.
2. Calculer $\text{Card}(E \times F)$.
3. Dire si les couples suivants appartiennent à $E \times F$:

$$(4; 0), \quad (0; 4), \quad (-1; 3).$$

Exemple

Exercice 2 On considère :

$$P = \{1; 2\} \quad \text{et} \quad Q = \{5\}.$$

1. Déterminer $P \times Q$.
2. Déterminer $Q \times P$.
3. Comparer les deux ensembles obtenus.

Exemple

Exercice 3 On considère :

$$A = \{-2; 0; 1\} \quad \text{et} \quad B = \{-1; 2\}.$$

1. Déterminer $A \times B$.

2. Représenter graphiquement les points correspondants dans un repère.
3. Calculer $\text{Card}(A \times B)$.

Exercices d'approfondissement

Exemple

Exercice 4 On considère les intervalles :

$$I = [-1; 2] \quad \text{et} \quad J = [1; 3[.$$

1. Écrire $I \times J$ avec une condition sur x et y .
2. Représenter graphiquement $I \times J$ dans un repère.
3. Préciser si le point $(2; 3)$ appartient à $I \times J$.

Exemple

Exercice 5 On considère :

$$C = \{0; 1; 2; 3\}$$

et l'ensemble :

$$S = \{(x; y) \in C \times C \mid x + y = 3\}.$$

1. Déterminer les couples de S .
2. Représenter graphiquement ces couples dans un repère.
3. Expliquer pourquoi S est un sous-ensemble de $C \times C$, mais n'est pas égal à $C \times C$.

Synthèse

Cours

À retenir

- Un couple $(a; b)$ est ordonné : l'ordre des éléments compte.
- Le produit cartésien $A \times B$ est l'ensemble des couples $(a; b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
- En général, $A \times B \neq B \times A$.
- Si A et B sont finis, alors :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B).$$

- Dans un repère, un produit cartésien peut se représenter par des points ou par une zone du plan.
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}^2$: c'est l'ensemble des couples réels $(x; y)$, donc l'ensemble des coordonnées possibles des points du plan.

Corrections détaillées

Exemple

Correction de l'exercice 1 On a :

$$E = \{-1; 4\} \quad \text{et} \quad F = \{0; 3\}.$$

1. Déterminer $E \times F$.

Le premier élément de chaque couple vient de E , le second vient de F .

Avec -1 , on obtient :

$$(-1; 0), \quad (-1; 3).$$

Avec 4 , on obtient :

$$(4; 0), \quad (4; 3).$$

Donc :

$$E \times F = \{(-1; 0), (-1; 3), (4; 0), (4; 3)\}.$$

2. Calculer le cardinal.

On a :

$$\text{Card}(E) = 2 \quad \text{et} \quad \text{Card}(F) = 2.$$

Donc :

$$\text{Card}(E \times F) = 2 \times 2 = 4.$$

3. Tester l'appartenance.

$$(4; 0) \in E \times F$$

car $4 \in E$ et $0 \in F$.

$$(0; 4) \notin E \times F$$

car le premier élément devrait appartenir à E , or $0 \notin E$.

$$(-1; 3) \in E \times F$$

car $-1 \in E$ et $3 \in F$.

Exemple

Correction de l'exercice 2 On a :

$$P = \{1; 2\} \quad \text{et} \quad Q = \{5\}.$$

1. Déterminer $P \times Q$.

Le premier élément vient de P , le second vient de Q . Donc :

$$P \times Q = \{(1; 5), (2; 5)\}.$$

2. Déterminer $Q \times P$.

Cette fois, le premier élément vient de Q , donc il vaut 5. Le second vient de P , donc il vaut 1 ou 2. Ainsi :

$$Q \times P = \{(5; 1), (5; 2)\}.$$

3. Comparer.

Les couples ne sont pas les mêmes :

$$(1; 5) \neq (5; 1) \quad \text{et} \quad (2; 5) \neq (5; 2).$$

Donc :

$$P \times Q \neq Q \times P.$$

Exemple

Correction de l'exercice 3 On a :

$$A = \{-2; 0; 1\} \quad \text{et} \quad B = \{-1; 2\}.$$

1. Déterminer $A \times B$.

Pour chaque élément de A , on l'associe aux deux éléments de B .

Avec -2 :

$$(-2; -1), \quad (-2; 2).$$

Avec 0 :

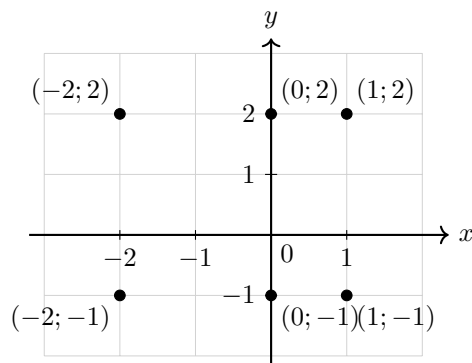
$$(0; -1), \quad (0; 2).$$

Avec 1 :

$$(1; -1), \quad (1; 2).$$

Donc :

$$A \times B = \{(-2; -1), (-2; 2), (0; -1), (0; 2), (1; -1), (1; 2)\}.$$

2. Représentation graphique.

Chaque point représenté a une abscisse appartenant à A et une ordonnée appartenant à B .

3. Cardinal.

On a :

$$\text{Card}(A) = 3 \quad \text{et} \quad \text{Card}(B) = 2.$$

Donc :

$$\text{Card}(A \times B) = 3 \times 2 = 6.$$

Exemple

Correction de l'exercice 4 On a :

$$I = [-1; 2] \quad \text{et} \quad J = [1; 3[.$$

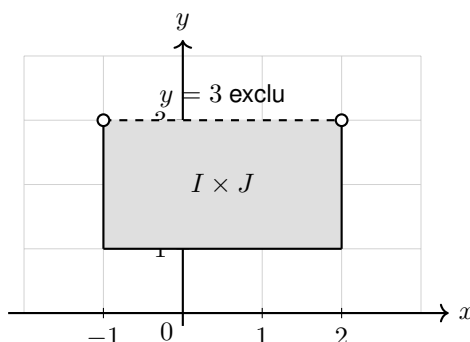
1. Écriture avec des conditions.

Dire que $(x; y) \in I \times J$ signifie :

$$x \in I \quad \text{et} \quad y \in J.$$

Donc :

$$I \times J = \{(x; y) \mid -1 \leq x \leq 2 \text{ et } 1 \leq y < 3\}.$$

2. Représentation graphique.

La zone grisée correspond aux points dont l'abscisse est comprise entre -1 et 2 , bornes incluses, et dont l'ordonnée est comprise entre 1 inclus et 3 exclu.

3. Appartenance de $(2; 3)$.

On a bien :

$$2 \in [-1; 2].$$

Mais :

$$3 \notin [1; 3[.$$

Donc :

$$(2; 3) \notin I \times J.$$

Exemple

Correction de l'exercice 5 On considère :

$$C = \{0; 1; 2; 3\}$$

et :

$$S = \{(x; y) \in C \times C \mid x + y = 3\}.$$

1. Déterminer les couples de S .

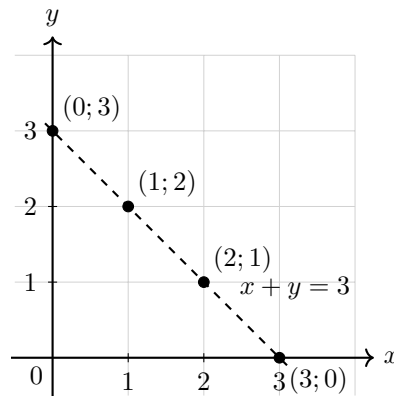
On cherche les couples $(x; y)$ avec $x \in C$, $y \in C$ et $x + y = 3$.

x	$y = 3 - x$
0	3
1	2
2	1
3	0

Tous les nombres obtenus appartiennent à C . Donc :

$$S = \{(0; 3), (1; 2), (2; 1), (3; 0)\}.$$

2. Représentation graphique.



Les quatre points sont alignés sur la droite d'équation $x + y = 3$, mais seuls les points dont les coordonnées appartiennent à C sont retenus.

3. Comparer S et $C \times C$.

Par définition :

$$S = \{(x; y) \in C \times C \mid x + y = 3\}.$$

Donc tous les éléments de S appartiennent à $C \times C$. On a :

$$S \subset C \times C.$$

Mais S n'est pas égal à $C \times C$, car $C \times C$ contient tous les couples formés avec deux éléments de C , pas seulement ceux dont la somme vaut 3.

Par exemple :

$$(0;0) \in C \times C$$

mais :

$$0 + 0 \neq 3,$$

donc :

$$(0;0) \notin S.$$

Ainsi :

$$S \subset C \times C \quad \text{et} \quad S \neq C \times C.$$

Retrouver Jacob Formation



jacob-formation.fr